Esercizi di Meccanica e Termodinamica

corso di Fisica Generale I

Ultima revisione: 15 marzo 2024

A cura di: Stefano Lacaprara

INFN Sezione di Padova
via Marzolo, 8
35131 Padova, Italia

Stefano.Lacaprara@pd.infn.it

Sommario

Questa è una raccolta di esercizi indirizzati al corso di Fisica Generale I, meccanica e termodinamica, corso di laurea in Fisica. Si tratta di esercizi che propongo e svolgo a lezione durante il corso alla facoltà di Fisica dell'Università di Padova. Vuole essere di aiuto agli studenti che desiderano provare a fare gli esercizi per conto loro, ma non sostituisce la lezione in aula. In particolare, le soluzioni, che si trovano alla fine dei capitoli, sono il più delle volte solo accennate oppure è messo solo il risultato numerico. Questo sia per non andare in competizione con il corso stesso, sia per la noia mortale che è scrivere una soluzione completa di un esercizio per quanto semplice.

Gli esercizi stessi vengono da una varietà di fonti, principalmente vecchi compiti sia proposti da me sia tramandati, come "memoria del dipartimento", dagli esercitatori del passato, spesso con modifiche e aggiornamenti.

L'ordine degli esercizi segue più o meno lo svolgimento del corso, e richiede, ovviamente, lo studio della teoria, che qui non viene minimamente trattata. Le formule utilizzate per gli esercizi svolti in modo completo sono considerate "date", e non vengono dimostrate o giustificate, a meno che si tratti di casi particolari non coperti da un normale libro di testo.

La correzione delle bozze è, o meglio dovrebbe essere, una parte importante della stesura di questi esercizi: per quanto abbia fatto attenzione, errori e imprecisioni sono sempre possibili, e anzi vi sarò grato se vorrete segnalarmele.

[1] se lo fate, vi voglio venire a vedere! O forse no ...

Indice

Parte I
Meccanica punto materiale

1 Vettori

Esercizio 1.1

Dati i vettori $\vec{a}, \vec{b}$ di componenti, rispettivamente: $\vec{a} = (2, 3, -1)$ e $\vec{b} = (3, 3, 4)$ in rappresentazione cartesiana (x, y, z), si calcoli:

1. $|a|$, $|b|$;
2. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$
3. $|c|$, $|d|$;
4. il prodotto scalare $s = \vec{a} \cdot \vec{b}$
5. l'angolo θ_{ab} tra i due vettori;
6. l'angolo θ_x di $\vec{a}$ con l'asse x;
7. il prodotto vettoriale $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, dimostrando che tale vettore $\vec{v}$ risulta perpendicolare al piano dove giacciono $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Esercizio 1.2

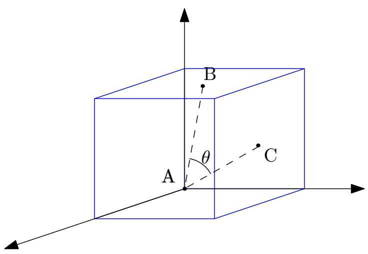
Si considerino i due vettori $\vec{v} = 4.5\hat{x} + 5.1\hat{y} - 3.0\hat{z}$ e $\vec{u} = 2.6\hat{x} + 6.1\hat{y} + 9.0\hat{z}$ in un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z).

Determinare:

1. la rappresentazione di $\vec{v}$ e $\vec{u}$ in coordinate cilindriche (ρ, ϕ, z)
2. la rappresentazione di $\vec{v}$ e $\vec{u}$ in coordinate sferiche (ρ, θ, ϕ)
3. $\vec{v} \cdot \vec{u}$;
4. $\vec{v} \times \vec{u}$;

Esercizio 1.3

Dato un cubo di spigolo l, si consideri un vertice A, e il centri B e C di due facce che non contengono il vertice A.



1. Calcolare l'angolo tra $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$

Esercizio 1.4

Si considerino due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e la loro somma $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, tali che:

- $|\vec{r}| = 30$
- angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{u}$ é $\theta_u = 25°$

- $\theta_v = 50°$

1. fornire una rappresentazione di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Esercizio 1.5

Siano dati in un sistema di riferimento cartesiano, i punti P e Q di coordinate: $P = (4, 5, -7)$, $Q = (-3, 6, 12)$

1. Calcolare la distanza tra il punto P e la retta passante per Q e parallela a $\vec{v} = (4, -1, 3)$

Soluzione dell'esercizio 1.1

1. $|a| = 3.7$, $|b| = 5.8$;
2. $\vec{c} = (5, 6, 3)$, $\vec{d} = (-1, 0, -5)$;
3. $|c| = 8.4$, $|d| = 5.1$;
4. $a \cdot b = 11$;
5. $\theta_{ab} = \cos^{-1} \frac{a \cdot b}{|a||b|} = 59.7°$
6. $\cos^{-1} \frac{a \cdot \hat{x}}{|a|} = 57.7°$
7. $a \times b = (15, -11, -3)$, $(a \times b) \cdot a = 0 = (a \times b) \cdot b$

Soluzione dell'esercizio 1.2

1. $\vec{v} = (6.8, 48.6°, -3.0)_{\rho,\phi,z}$, $\vec{u} = (6.6, 66.9°, 9.0)_{\rho,\phi,z}$
2. $\vec{v} = (7.4, 113.9°, 48.6°)_{r,\theta,\phi}$, $\vec{u} = (11.2, 36.5°, 66.9°)_{r,\theta,\phi}$
3. $\vec{v} \cdot \vec{u} = 15.8$;
4. $\vec{v} \times \vec{u} = (64.2, -48.3, 14.2)_{x,y,z} = (8.16, 80.0°, -37.0°)_{r,\theta\phi}$

Soluzione dell'esercizio 1.3

1. $\overline{AB} = (l, l/2, l/2)$, $\overline{AC} = (l/2, l, l/2)$ $\theta = a\cos \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = 33.55°$

Soluzione dell'esercizio 1.4

1. $\vec{u} = (21.6, 10.1)$ e $\vec{v} = (8.4, -10.1)$
   Si puo' ragionare cosi': visto che $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, allora $v_r + u_r = 30$, dove v/u_r sono le proiezioni di v/u lungo r. $v_r = |v| \cos_v$ idem per u. Inoltre, per la stessa ragione, le componenti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ perpendicolari a $\vec{r}$ hanno somma nulla (cioe' sono uguali e opposte).
   Quindi

$$|v| \cos_v + |u| \cos_u = |r|$$
$$|v| \sin_v + |u| \sin_u = 0$$

Soluzione dell'esercizio 1.5

1. Sia P' la proiezione di P sulla retta in questione.
   La lunghezza di QP' e': $\vec{PQ}\vec{v}/|v| = 28/\sqrt{26}$ La lunghezza di PP' e': $|PP'| = \sqrt{|PQ|^2 - |PQ|^2} = 19.5$

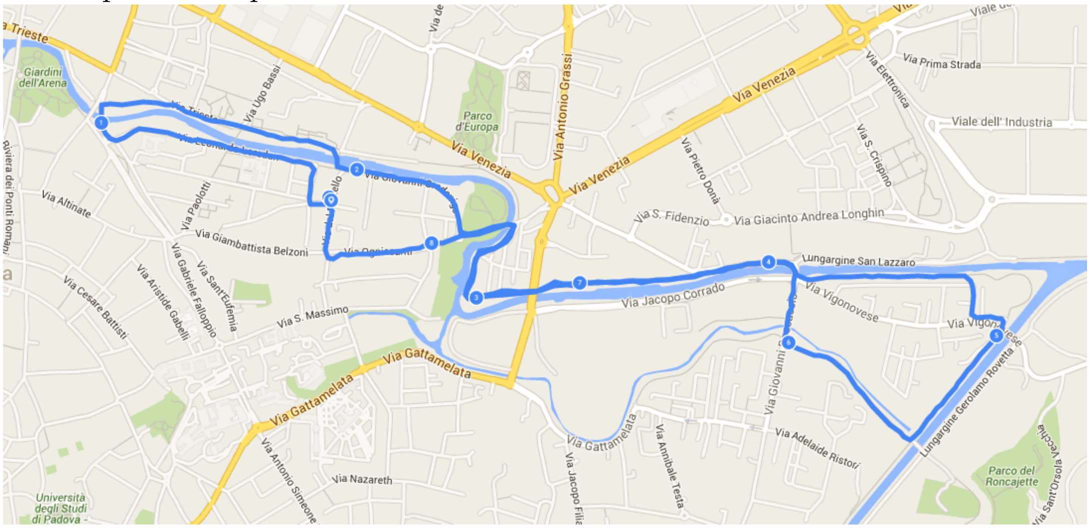
2 Cinematica

Esercizio 2.1

Una corsa podistica si svolge lungo un percorso lungo $L_{tot} = 8.57\ km$, con un tratto di andata e ritorno in comune. I più veloci corrono ad un ritmo di 4'30" per km, mentre i più lenti hanno un ritmo di 7' per km.

Dopo $L_1 = 4.2\ km$ dalla via, i corridori attraversano un incrocio stradale, e lo riattraversano una seconda volta dopo $L_2 = 6.3\ km$ dalla via.

1. Velocità massima e minima.
2. Tempo dei più veloci e dei più lenti all'arrivo.
3. Per quanto tempo sarà bloccato l'incrocio?



Esercizio 2.2

Il conduttore di treno che viaggia con velocità v_1 vede davanti a sé un secondo treno che viaggia con una velocità minore v_2, e frena con una decelerazione a.

1. Determinare la distanza minima d cui deve iniziare a frenare per evitare una collisione;
2. In condizioni limite quando e dove si toccano.

Esercizio 2.3

Un oggetto viene lanciato verso l'alto lungo la verticale e, quando ricade, tocca terra con una velocità $v = 79.2 m/s$. Sapendo che si conficca nel terreno per $h = 23 cm$, calcolare:

1. l'accelerazione che ferma l'oggetto, supponendo che sia costante;
2. il tempo trascorso fino all'arresto;
3. l'altezza massima raggiunta durante il lancio iniziale.

Esercizio 2.4

Un'auto che viaggia a $v_1 = 80 km/h$ si può arrestare in $d_1 = 57m$; se viaggia a $v_2 = 48 km/h$ si arresta in $d_2 = 24m$. Supponendo che il tempo di reazione del guidatore sia uguale nei due casi, calcolare:

1. l'accelerazione di frenata;
2. il tempo di reazione del guidatore.

Esercizio 2.5

Il moto di un punto materiale è descritto, in un sistema cartesiano, dall'equazione:

$$y = 1.28x - 0.31x^2$$

con $[y] = [x] = m$. Il moto è uniformemente accelerato lungo y e $v_x(0) = 5.19\ m/s = costante$.

Calcolare:

1. l'accelerazione $\vec{a}$;
2. la velocità media tra gli istanti $t = 0s$ e $t_1 = 1.5s$;
3. la velocità istantanea all'istante $t_1 = 3s$;
4. questo è l'unico moto compatibile con la traiettoria descritta dall'equazione?

Esercizio 2.6

In un sistema di riferimento inerziale O, il moto di un punto materiale è descritto dal vettore posizione:

$$\vec{r}(t) = A\hat{x} - Ct^3\hat{y} + (Dt^2 - Bt)\hat{z}$$

Determinare:

1. le dimensioni fisiche delle quantità A, B, C, D;
2. la velocità $\vec{v}(t)$;
3. l'accelerazione $\vec{a}(t)$;
4. descrivere qualitativamente il moto;

Lo stesso moto viene descritto da un secondo sistema di riferimento O', dal vettore posizione:

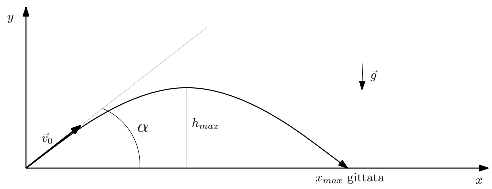
$$\vec{r'}(t) = A\hat{x} - Ct^3\hat{y} + (Dt^2 + Et)\hat{z}$$

con $A = 1$, $B = 2$, $C = 2.5$, $D = 3.5$, $E = 5$ nelle opportune unità SI.

5. quale è la velocità del sistema O' rispetto ad O;
6. se il punto materiale risente di forze di inerzia in O'.

Esercizio 2.7 *Equazione della balistica*

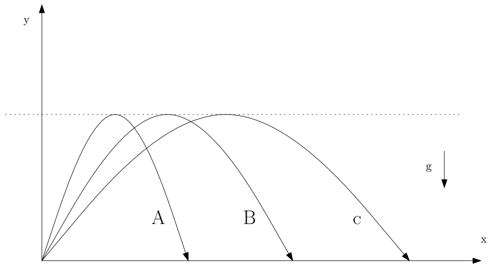
Un cannone spara un proiettile con una velocità iniziale v_0, ad un angolo α rispetto al terreno. Si determini, ignorando effetti di attrito con l'aria:



1. l'equazione della traiettoria;
2. la gittata;
3. l'altezza massima;
4. l'angolo di gittata massima
5. il tempo di volo del proiettile

Esercizio 2.8

Tre punti materiali seguono le tre traiettorie in figura, nel campo di gravità della terra. Si determini per quale traiettoria :



1. il tempo di volo è minore;
2. la componente orizzonatale della velocità iniziale è minore;
3. il modulo della velocità iniziale è minore.

Esercizio 2.9

Le migliori prestazioni di sempre nel salto in lungo sono le seguenti: Mike Powell (1991, Tokyo) $l = 8.95m$, Bob Beamon (1968, Mexico City) $l = 8.90m$, Carl Lewis (1991, Tokyo) $l = 8.87$. Supponendo che il modulo della velocità del saltatore al momento dello stacco sia pari a $v_0 = 9.50m/s$, si calcoli, trascurando la resistenza dell'aria:

1. l'altezza massima durante il volo dei saltatori;
2. la migliore prestazione teoricamente possibile.

Esercizio 2.10 *Eq. della balistica in salita*

Si vuole lanciare un sasso il più lontano possibile lungo un piano inclinato con un angolo θ rispetto all'orizzontale. Supponendo fissata il modulo della velocità iniziale del sasso si calcoli:

1. l'angolo α rispetto al piano orizzontale per raggiungere la massima distanza lungo il piano inclinato;
2. si verifichi che la soluzione trovata si riduce alla nota equazione della balistica per $\theta = 0$.

Esercizio 2.11

1. Dimostrare che la gittata è la stessa per angolo $\theta = 45° \pm \delta$;
2. calcolare δ per $v_0 = 30m/s$ e gittata$= 20m$.

Esercizio 2.12

Un cacciatore al suolo spara con un fucile contro un'anatra che vola con velocità orizzontale $v_a = 60\ km/h$ ad altezza $h = 100m$, nell'istante in cui l'anatra gli passa sopra.

Calcolare:

1. la minima velocità di uscita del proiettile v_0 per colpire l'anatra;
2. l'alzo minimo per colpire l'anatra.

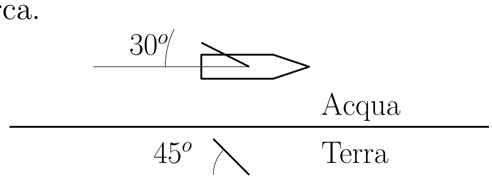
Esercizio 2.13

Un aereo viaggia orizzontalmente ad una altezza $h = 225m$ e con una velocità $v = 155m/s$ rispetto al suolo e il pilota deve sganciare un pacco su un bersaglio.

1. Calcolare a quale angolo ϕ rispetto all'orizzonte si deve trovare il bersaglio per ottenere un lancio perfetto;
2. idem, se l'aereo sta scendendo con un angolo $\alpha = 15°$? Discutere la soluzione;
3. idem, se l'aereo vola orizzonatale e il bersaglio si muove con velocita' $v_t = 14m/s$ nella stessa direzione e verso;

Esercizio 2.14

Una barca si muove vicino alla riva con velocità $\vec{v}_B = 10km/h$ rispetto a terra, parallelamente alla riva stessa. Una bandierina sulla barca forma un angolo $\alpha_B = 30°$ rispetto alla scia della barca. Una bandierina a terra forma un angolo $\alpha_T = 45°$ sempre rispetto alla scia della barca.



Determinare:

1. la velocità del vento $\vec{v}_T$ rispetto a terra;
2. la velocità apparente del vento $\vec{v}_A$ rispetto alla barca.

Esercizio 2.15 *

Una barca deve attraversare un fiume di larghezza $l = 20m$, la cui corrente risulta avere una velocità pari a $v_x = b(y(l - y))$, dove y è la distanza dalla sponda e $b = 5 \cdot 10^{-3} m^{-1} s^{-1}$. La velocità della barca è $v_y = 3.6km/h$.

Si calcoli:

1. il tempo necessario alla barca per attraversare il fiume;
2. il punto di arrivo.

Esercizio 2.16 *Caduta in un pozzo (G.Cella, Un esercizio al giorno)*

Un sasso viene lasciato cadere dentro un pozzo, e si sente il suono dell'urto con il fondo dopo $t = 2.0\ s$. Trascurando l'attrito dell'aria, calcolare:

1. la profondità del pozzo;
2. l'errore che viene fatto se si considera la velocità del suono in aria ($v_s = 340\ m/s$) infinita.
3. discutere l'errore del punto precedente

Esercizio 2.17 *(G.Cella, Un esercizio al giorno)*

Un'auto parte da ferma con moto uniformemente accelerato, con accelerazione a. Dopo un tempo t_0, un sasso viene lanciato verso l'auto dalla posizione iniziale, con velocità iniziale v_0, che si può supporre costante nel moto del sasso. Si chiede:

1. quale è la velocità orizzontale minima v_0 perché il sasso colpisca l'auto;
2. si discutano i risultati;
3. quale è l'angolo rispetto al piano cui deve essere lanciato il sasso nelle condizioni del punto 1.?
4. con quale velocità (relativa) il proiettile colpisce l'auto?

Esercizio 2.18 *Moto delle farfalle ** (G.Cella, Un esercizio al giorno)*

Si supponga che il moto delle farfalle notturne sia guidato da una sorgente luminosa, e che le farfalle mantengano costante l'angolo tra la direzione della luce e quella del volo. Se la luce è quella della luna, la farfalla vola in direzione rettilinea, ma se la luce è quella di una fiamma vicina, il volo non finirà bene per la farfalla.

La stessa strategia è seguita dai falchi nei confronti della preda

1. descrivere il moto della farfalla nelle condizioni di luce vicina;
2. perché la strategia funziona con luce lontana?

Esercizio 2.19 *(M.S.V. es:1.6)*

Un'auto ha una accelerazione massima $a_1 = 2\ m/s^2$, e una decelerazione massima (frenata) $a_2 = -4\ m/s^2$. Calcolare

1. il minimo tempo necessario per percorrere $l = 500\ m$, partendo e arrivando fermi;
2. lo spazio percorso in accelerazione;
3. la velocità massima.

Esercizio 2.20

Un bagnino deve soccorrere un bagnante in difficolta'. Il bagnino si trova inizialmente ad una distanza di $y_1 = 30\ m$ dalla riva del mare e il bagnante si trova a $y_2 = 50\ m$ dalla riva. La distanza tra i due nella direzione parallela alla riva e' $x_{tot} = 100\ m$.

Il bagnino e' in grado di correre sulla spiaggia con una velocita' $v_s = 10\ m/s$ e nuotare con $v_m = 1.6\ m/s$.

1. quale percorso deve scegliere per raggiungere il bagnante nel tempo piu' breve possibile?
2. quanto tempo ci mette?

Soluzione dell'esercizio 2.1

1. $v_{max} = 1km/4'30" = 3.70m/s = 13.3\ km/h$, $v_{min} = 2.38\ m/s = 8.5\ km/h$ $\Delta v = 1.32\ m/s = 4.75\ km/h$
2. $T_{primi} = 2316\ s = 38'36"$, $T_{ultimi} = 3600\ s = 1\ h$
3. I primi attraversano l'incrocio la prima volta dopo: $T_1 = 1135\ s$
   Lo riattraversano dopo $T_2 = 1701\ s$ (sempre dal via).
   Gli ultimi impegnano l'incrocio dopo $T_3 = 1765\ s$, e lo riattraversano dopo $T_4 = 2647\ s$.
   Quindi l'incrocio resta occupato da T_1 a T_2, e poi da T_3 a T_4 cioè per $1512\ s = 25'$, e per circa 1 minuto, i corridori si incrociano sul ponte.

Soluzione dell'esercizio 2.2

1. In un sistema di riferimento solidale con il secondo treno:
   $d(t) = -d + (v_1 - v_2)t - 1/2at^2 \geq 0$. Il contatto avviene quando $d(t) = 0$ e l'equazione in tal caso non ha soluzioni se $\Delta = (v_1 - v_2)^2 - 2ad \leq 0$, quindi $d \geq \frac{(v_1-v_2)^2}{2a}$ ovvero $a \geq \frac{(v_1-v_2)^2}{2d}$.
   Da notare che ho usato $-1/2at^2$, quindi l'equazione del moto decelerato, e quindi trovo un limite inferiore per a, cioè $a \geq a_{min}$. Avrei potuto scrivere l'equazione del moto accelerato $+1/2at^2$ e avrei trovato lo stesso risultato con il segno invertito, a significare che l'accelerazione deve essere negativa (decelerazione) e minore di un valore massimo. $a \leq a_{max} < 0$
   Si può risolvere anche in un sistema di riferimento solidale a terra (laboratorio) o solidale con il primo treno. Ovviamente il risultato non cambia.
2. l'equazione del moto $-d + (v_1 - v_2)t - 1/2at^2 = 0$ in condizioni limite ha soluzione $t^\star = \frac{2d}{v_1-v_2}$. Da notare che se il moto fosse stato uniforme, la soluzione sarebbe stata $t = \frac{d}{v_1-v_2}$. Nel caso accelerato, la velocità relativa iniziale è $v_1 - v_2$, mentre quella finale è 0, e varia linearmente (accelerazione costante), da cui il fattore 2.
   La posizione del primo treno al momento del contatto è $s_1(t^\star) = v_1 t^\star + 1/2at^\star$, quella del secondo è $s_2(t^\star) = d + v_2 t^\star$ e si può verificare che coincidono (ovviamente).
   $s = d\frac{v_1+v_2}{v_1-v_2}$
   Casi limite: se $v_1 = v_2$ non si scontrano mai. Se $v_2 = 0$ si scontrano in posizione d, cioè dove si trova il secondo treno (fermo).
   Che significato fisico ha la soluzione nel caso in cui $v_2 > v_1$?

Soluzione dell'esercizio 2.3

1. istante di impatto con terreni: $t = 0s$ $v(t = 0) = v_0$
   istante di arresto con terreni: $t = t^\star$ $v(t^\star) = 0$

$$\begin{aligned} v(t^\star) &= 0 = v_0 - at^\star \\ x(t^\star) &= h = v_t t^\star - 1/2a(t^\star)^2 \end{aligned}$$

   $a = \frac{v_0^2}{2h} = 13.6 \cdot 10^3\ m/s;$

2. $t^\star = \frac{v_0}{a} = 5.8 \cdot 10^{-3}\ s$;
3. Uso equazione della balistica, il modulo della velocità iniziale del lancio è uguale alla velocità di impatto a terra perché il problema è simmetrico rispetto all'inversione del tempo. $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 319.7\ m$.

Soluzione dell'esercizio 2.4

1. Scrivo equazione del moto per posizione e velocità nei due casi, consideranto come istante finale quelli di arresto.

$$\begin{aligned} d_1 &= v_1 t_0 + v_1 t_1 - 1/2 a (t_1)^2 \\ d_2 &= v_2 t_0 + v_2 t_2 - 1/2 a (t_2)^2 \\ 0 &= v_1 - a t_1 \\ 0 &= v_2 - a t_2 \end{aligned}$$

Risolvendo per a, t_0, t_1, e t_2:

$$\begin{aligned} a &= 5.81\ m/s^2 \\ t_0 &= 0.65\ s \\ t_1 &= 3.85\ s \\ t_2 &= 2.96\ s \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2.5

1. $x(t) = v_x(0)t$, $y(t) = 1.28 v_x(0) t - 0.31 v_x^2(0) t^2 = 6.64t - 8.35t^2 = v_y(0) + 1/2 a_y t^2$ da cui $v_y(0) = 6.64\ m/s$ e $a_y = -16.7\ m/s^2$ $\vec{a} = a_y \hat{y}$;
2. $< \vec{v}_{0,3s} = \frac{\vec{r}(t=1.5s) - \vec{r(0)}}{1.5s} = (5.19, -5.89)\ m/s$ $|v| = 7.85\ m/s$, $\theta = -48.6°$;
3. $\vec{v}(3s) = (5.19, -43.5)\ m/s$ $|v| = 43.8\ m/s$, $\theta = -74°$;
4. Un moto qualunque vincolato a quella parabola è descritto dalla stessa equazione.

Soluzione dell'esercizio 2.6

1. $A\ [m]$, $B\ [m/s]$, $C\ [m/s^3]$, $D\ [m/s^2]$, $E\ [m/s]$
2. $\vec{v}(t) = -3Ct^2 \hat{y} + (2Dt - B)\hat{z}$
3. $\vec{a}(t) = -6Ct\hat{y} + 2D\hat{z}$
4. Nella direzione $\hat{x}$, il punto è fermo $x(t) = A$;
   lungo $\hat{z}$il moto è uniformemente accelerato, con $a_z = 2D$, velocità iniziale $v(t = 0)_z = -B$, e posizione iniziale $z(t = 0) = 0$.
   Lungo $\hat{y}$, il moto ha accelezione non costante $a(t)_y = -6Ct$, velocità e posizione iniziale nulle.
5. $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_O}$ quindi $\vec{v_O} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r'}(t)}{dt} = -(B + E)\hat{z}$
6. il moto di O' rispetto a O è rettilineo uniforme, quindi non ci sono forze d'inerzia.

Soluzione dell'esercizio 2.7

1. In un sistema cartesiano:

$$\begin{aligned} x(t) &= \quad v_x(0)t = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) &= v_y(0)t - 1/2gt^2 = v_0 \sin\alpha t - 1/2gt^2 \end{aligned}$$

   Traiettoria:

$$y(x) = \tan\alpha x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

2. Gittata: $x(\alpha) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$
3. Altezza massima per un dato α si ha per $x = Gittata/2$
   $y_{max}(\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha = \frac{v_y^2(0)}{2g}$
   Altezza massima $y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$ per $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ (cannone verticale)
4. la gittata massima si ha per $\sin 2\alpha = 1$ quindi per $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$, e vale $x_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.
   In questo caso $h_max(\alpha = \frac{\pi}{4}) = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{h_{max}}{2}$.
5. $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_{0,y}}{g}$, $x_{max} = v_{0,x}t = v_0^2 \sin 2\alpha$

Soluzione dell'esercizio 2.8

1. Dalle equazioni balistica, $y_{max}(\alpha) = \frac{v_y^2(0)}{2g}$, dato che le altezze massime sono uguali, allora $v_y(0)$ sono uguali.
   Tempo di volo è tempo per salire e scendere $T = 2 \cdot \frac{v_y(0)}{g}$ ed è uguale per le tre traiettorie;
2. Dato che tempo di volo è costante, $v_x(0)$ è maggiore per la traiettoria con la gittata più lunga. $A < B < C$;
3. $v_0 = \sqrt{v_x^2(0) + v_y^2(0)}$ quindi segue lo stesso ordine di $v_x(0)$ $A < B < C$.

Soluzione dell'esercizio 2.9

1. Applico equazioni balistica

Saltatore	θ	y_{max}
Powell	38.0°	1.74 m
Beamon	37.3°	1.69 m
Lewis	37.2°	1.69 m

   Da notare che la latitudine e l'altezza di Tokyo rispetto a Città del Messico rendendo il valore locale di g leggermente diverso nelle due città.
   Tokyo (35°, 0 m slm) $g = 9.798\ m/s^2$; Città del Messico (19°, 2400 m slm) $g = 9.776\ m/s^2$. L'altezza di Città del Messico inoltre, rende l'aria meno densa rispetto a Tokyo, e questo riduce l'attrito con l'aria durante il volo (e la rincorsa) dell'atleta. Questo non è considerato in questo problema, ma è in realtà il fattore più importante per andare in quota per aumentare le prestazioni atletiche.
2. Se Powell avesse saltato con un angolo di 45°, avrebbe saltato $l = 9.21\ m$ a Tokyo e $l = 9.23\ m$ a Mexico City. Ovviamente non è scontato che un saltatore possa cambiare l'angolo di stacco mantenendo costante il modulo della velocità iniziale.

Soluzione dell'esercizio 2.10

1.

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \tan\alpha x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 \\
y(x) &= \tan\theta x \\
R^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

dove R è la distanza dall'origine del punto cui cade il sasso. Risolvendo per R

$$R = \frac{2v_0^2}{g\cos\theta}(\tan\alpha - \tan\theta)\cos^2\alpha$$

Ottengo il massimo ponendo $\frac{dR}{d\alpha} = 0$, il che avviene per:

$$(\tan\alpha - \tan\theta)\sin 2\alpha = 1$$

.

2. Se $\theta = 0$, si riduce a $\sin^2\alpha = 1/2$, quindi $\theta = 45°$

Soluzione dell'esercizio 2.11

1. Banale: gittata= $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, che è simmetica attorno a $\alpha = 45°$
2. $\delta = 39.7°$

Soluzione dell'esercizio 2.12

1. L'altezza massima raggiunta è $h_{max} = \frac{v_y^2(0)}{2g}$, quindi $v_y(0) = \sqrt{2gh}$. Per colpire l'anatra, $v_x(0) = v_a$. $v_0 = \sqrt{(v_x^2(0) + v_y^2(0))} = \sqrt{v_a^2 + 2gh} = 47.3\ m/s$
2. Se $v_x(0) = v_a$ tutti gli alzi permettono di colpire l'anatra, posto che l'altezza massima sia sufficiente. $\tan\alpha = \frac{v_y(0)}{v_x(0)} \geq \frac{\sqrt{2gh}}{v_a} = 2.65$, $\alpha \geq 69°$

Soluzione dell'esercizio 2.13

1. Equazione traiettoria è:

$$y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

$y = 0$ se $x^2 = \frac{h}{\tan\phi}$, che porge: $\phi = a\tan\sqrt{\frac{gh}{2v_0^2}} = 12.1°$

2. Equazione traiettoria diventa:

$$y(x) = h - \tan\alpha x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

imponendo di colpire il bersaglio, si ottiene una equazione di secondo grado, con una soluzione negativa (non fisica) e una positiva: $\phi' = 21.4°$

3. Come nel caso iniziale, ma $v"_0 = v_0 - v_t$. $\phi" = a\tan\frac{gh}{2(v"_0)^2} = 13.3°$

Soluzione dell'esercizio 2.14

1. Uso un sistema di riferimento con $\hat{y}$ lungo la direzione del fiume, concorde con la corrente, e $\hat{x}$ perpendicolare.
   La velocità rispetto al sistema di riferimento della barca è: $\vec{v}_B = v_b\hat{y}$, quella del vento è $\vec{v}_T = -\sqrt{2}/2 v_T\hat{x} - \sqrt{2}/2 v_T\hat{y}$, dato che il vendo forma un angolo di 45° rispetto alla scia della barca, quindi rispetto $-\hat{y}$.
   La velocità del vento rispetto alla barca si ottiene: $\vec{v}_A = \vec{v}_T - \vec{v}_B$, ossia sommando alla velocità del vento rispetto a terra, la velocità della terra rispetto alla barca, che è l'opposto della velocità della barca rispetto a terra:
   $$\vec{v}_A = (-\sqrt{2}/2v_T)\hat{x} + (-\sqrt{2}/2v_T - v_B)$$
   .
   Inoltre, l'angolo tra il vento e la scia della barca, nel sistema di riferimento della barca è 30°, quindi:
   $$\tan 30° = 1/\sqrt{3} = \frac{v_{A,x}}{v_{A,y}} = \frac{\sqrt{2}/2v_T}{\sqrt{2}/2v_T + v_B}$$
   Da queste due equazioni ricavo: $v_T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) v_B = \frac{\sqrt{3}}{3} v_B = 5.2\ m/s$ nella direzione della bandiera a terra;
2. Conoscendo le due componenti di $\vec{v}_A$, posso ricavarmi $v_A = 7.4\ m/s$, nella direzione della bandiera sulla barca.

Soluzione dell'esercizio 2.15

1. Moto perpendicolare alla corrente è indipendente dalla corrente. $t_1 = \frac{l}{v_y} = 20s$
2. Eq. del moto della barca:
   $$\begin{aligned} v_y(t) &= v_y \\ v_x(t) &= b(y(t)(l - y(t))) \end{aligned}$$
   Dalla prima equazione ricavo, integrando: $y(t) = v_y t$, quindi la seconda diventa
   $$v_x(t) = b(v_y t(l - v_y t))$$
   che integrata rispetto al tempo, fornisce:
   $$x(t) = b v_y t^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{v_y t}{3}\right)$$
   Quindi $x(t_1) = \frac{bl^3}{6v_y} = 6.7\ m$

Soluzione dell'esercizio 2.16

1. $h = 1/2gt^2 = 19.6\ m/s$
2. $t_s = h/v_s$, $t = t_c + t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$ Risolvo per $h = 18.5\ m$. Quindi l'errore è circa 1.1 m, pari a $\sim 6\%$

3. l'errore nel non considerare la velocità del suono come finita, porta ad un sovrastima della profondità di circa 1 m (bias). Tuttavia un errore del 2% sulla misura del tempo ($t = t \pm 0.04$ s), porterebbe ad un errore simile. Quindi prima di valutare il bias introdotto dal suono che si propaga, è bene valutare l'incertezza sulla misura del tempo. Se questa viene fatta a mano con un orologio o cronometro è molto facile che l'incertezza su start e stop del cronometro sia ben più grande di qualche %. In tal caso, una correzione per la velocità del suono sarebbe del tutto inutile.

Soluzione dell'esercizio 2.17

1. $v_0 = 2at_0$, e l'urto avviene a $t = 2t_0$;
2. l'altra soluzione si ha per $v_0 = 0$, l'urto avviene a $t = 0$ quando l'auto è ancora ferma e si trova nella stessa posizione del sasso, che non viene lanciato (ovvero lanciato con velocità nulla, cioè fermo);
3. applico eq. della balistica. Componente verticale della velocità: $v_0^y = 1/2gt_0$, quindi $\tan\theta = \frac{g}{4a}$
4. data la simmetria della traiettoria parabolica del proiettile, è la stessa velocità verticale con il quale il proiettile viene lanciato, quindi $v_{urto} = \frac{gt_0}{4}$. Da notare che questa soluzione si riferisce alla velocità minima del sasso: esistono infinite altre soluzioni con velocità iniziali maggiori, dove il sasso urta l'auto prima e con velocità relativa superiore. NB. Non provatelo a casa!

Soluzione dell'esercizio 2.18

1. Descrivo moto in coord. polari, con centro sulla luce. Sia α l'angolo tra la direzione di volo e la luce (o la preda):
   $\vec{v} = \dot{R}\hat{u}_r + R\dot{\theta}\hat{u}_\theta = -v\cos\alpha\hat{u}_r + v\sin\alpha\hat{u}_\theta$
   da cui: $\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R}\tan\alpha$ che ha come soluzione: $R(\theta) = R_0 e^{\frac{-\theta}{\tan\alpha}}$, che è una spirale logaritmica.
   Se il volo è verso la luce ($\tan\alpha > 0$), allora la distanza diminuisce, e la farfalla "cade" verso la fiamma.
2. Se $R_0 = \infty$, allora il moto diventa rettilineo.

Soluzione dell'esercizio 2.19

1. Sia t_1 il tempo di accelerazione, v_1 la velocità all'istante t_1, s_1 lo spazio percorso durante l'accelerazione, e $(t, v, s)_2$ i corrispondenti valori all'istante finale:

$$v(t) = \begin{cases} 0 + a_1 t, & t < t_1 \\ v_1 + a_2(t - t_1), & t > t_1 \end{cases}$$

   Inoltre $v(0) = 0 = v(t_2)$

$$s(t) = \begin{cases} 0 + 1/2a_1 t2, & t < t_1 \\ s_1 + v_1(t - t_1) + 1/2a_2(t - t_1)^2, & t > t_1 \end{cases}$$

   con $s(0) = 0$ e $s(t_2) = l$

Risolvendo il sistema si trova t_2:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{\frac{2l}{a_1\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)}} &= 18.25\ s \\ t_2 = t_1\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right) &= \sqrt{\frac{2l(a_2-a_1)}{a_1a_2}} &= 27.39\ s \\ & t_2 - t_1 &= 9.14\ s \end{aligned}$$

2. $l_1 = 1/2 a_1 t_1^2 = 333\ m$, $l_2 = l - l_1 = 167\ m$
3. $v_{max} = v_1 = a_1 t_1 = 36.5\ m/s$
   In alternativa, molto piu' semplice: durante l'accelerazione $v(s) = \sqrt{2a_1 s}$ e idem durante la frenata. Visto che la velocita' massima e' pari a $v_{max} = \sqrt{2a_1l_1} = \sqrt{2a_2l_2}$

   $$\begin{aligned} 2a_1l_1 &= 2a_2l_2 \\ l_1 + l_2 &= l \end{aligned}$$

   da cui si ricava $l_1 = \frac{l}{1+a_2/a_1}$. Da qui e' semplice calcolare la $v_{max} = \sqrt{2a_1l_1}$ e il tempo per i due tratti: $t_1 = v_{max}/a_1$, ottenendo gli stessi valori numerici di prima.

Soluzione dell'esercizio 2.20

1. Considere un sistema di riferimento $x-y$ centrato nella posizione iniziale del bagnino. In questo riferimento, la posizione del bagnante è (x_{tot}, y_1+y_2). Sia x la coordinata in cui la traiettoria del bagnino arriva alla riva del mare.
   Lo spazio percorso sulla spiaggia risulta $l_s = \sqrt{x^2+y_1^2}$ e il corrispondente tempo $t_1 = \frac{\sqrt{x^2+y_1^2}}{v_s}$. Analogamente il tempo percorso nuotando risulta: $t_2 = \frac{\sqrt{(x_{tot}-x)^2+y_2^2}}{v_m}$. Il tempo minimo si trova minimizzando la funzione $t(x) = t_1 + t_2$ in funzione di x. Il minimo si trova per $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_s}{v_m}$, dove θ_1 e' l'angolo tra la traiettoria sulla spiaggia e la perpedicolare alla riva, $\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y_1^2}}$ e analogamente per θ_2.

   Quindi ho queste 4 equazioni con 4 incognite, che posso, con pazienza e trigonometria, risolvere.

   $$\begin{aligned} y_1 &= l_1\cos\theta_1 \\ y_2 &= l_2\cos\theta_2 \\ x_{tot} &= l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 \\ \sin\theta_1/v_s &= \sin\theta_2/v_m \end{aligned}$$

2.1 Cinematica moto circolare

Esercizio 2.21

Una ruota di raggio $r_1 = 30cm$ parte da ferma con accelerazione angolare $\alpha = 0.4rad/s^2$. Trasmette il suo moto mediante una cinghia che non scivola ad una seconda ruota di raggio $r_2 = 12cm$. Calcolare:

1. il tempo Δt che impiega la ruota piccola a raggiungere una velocità angolare $\omega = 300\text{giri}/s$.

Esercizio 2.22

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 3.6m$. Ad un certo istante la sua velocità è $v_0 = 17m/s$ e l'accelerazione forma un angolo di $\theta = 22°$ con la direzione radiale. Determinare:

1. di quanto aumenta il modulo della velocità per unità di tempo per $t = t_0$;
2. legge oraria del modulo della velocità: discutere i risultati;
3. quanto vale il modulo dell'accelerazione totale per $t = t_0$;
4. legge oraria del modulo dell'accelerazione;

Esercizio 2.23 **

Un bambino è fermo sulla piattaforma di una giostra a $r = 2m$ dall'asse di rotazione. La giostra parte da ferma con accelerazione angolare costante finché raggiunge la velocità angolare di regime $\omega = 0.15giri/s$ dopo $n = 2$ giri. A questo punto il bambino si mette a camminare in direzione radiale verso il bordo con una velocità $v_b = 2km/h$.

Calcolare:

1. l'accelerazione $\vec{a}$ e la velocità $\vec{v}$ del bambino:
   a) durante l'accelerazione della giostra;
   b) quando la giostra è a regime e il bambino inizia a muoversi.

Esercizio 2.24

Un corpo è appeso tramite una fune inestensibile ad una carrucola di raggio $R = 10cm$. Il corpo scende con moto uniformente accelerato tale che: $v(t_0 = 0s) = 0.04m/s$ (verso il basso) e $\Delta h(t_1 = 2s) = -0.2m$ (il corpo è sceso).

1. Calcolare l'accelerazione $\vec{a}$ del bordo della carrucola all'istante $t = 5s$.

Soluzione dell'esercizio 2.21

1. La velocità tangenziale delle due ruote è la stessa.
$\Delta t = \frac{r_2}{r_1}\frac{\omega}{\alpha} = 31.4s$

Soluzione dell'esercizio 2.22

1. La velocità, di cui è noto il modulo, ha direzione tangente alla circonferenza.
Il testo parla solo di direzione dell'accelerazione, in particolare non è esplicito se il verso e' diretto verso l'interno o verso l'esterno. Tuttavia sappiamo che si tratta di un moto circolare e che ci deve essere una componente centripeta, quindi il verso dell'accelerazione deve essere diretto verso il centro della circonferenza.
L'accelerazione ha componente centripeta a_N e tangenziale a_T.
$a_N = \frac{v^2}{R}$, $\tan\theta = \frac{a_T}{a_N}$.
La variazione di modulo della velocità è dovuta alla sola a_T, visto che a_N ruota la velocità ma non la cambia in modulo. $\frac{d|v|}{dt} = a_T = \frac{v^2}{R}\tan\theta = 32.4m/s^2$
2. l'equazione del moto si ricava integrando: $\frac{dv}{v^2} = \frac{\tan\theta}{R}dt$, che ha soluzione: $v(t) = \frac{v_0 R}{R - v_0\tan\theta(t-t_0)}$.
Qualitativamente: dato l'angolo costante dell'accelerazione, c'è sempre una componente tangenziale, quindi la velocità tangenziale aumenta. Di conseguenza deve aumentare l'accelerazione centripeta, che quindi fa aumentare l'accelerazione tangenziale. Si tratta chiaramente di una situazione non fisica, che porta, in tempi finiti ($t = t_0 + \frac{R}{v_0\tan\theta}$) ad avere una velocità infinita. Un modello più fisico avrebbe sicuramente un limite superiore all'accelerazione centripeta (il disco si rompe!).
3. $|\vec{a}| = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \frac{v^2}{R}\sqrt{1+\tan^2\theta} = 86.6m/s^2$
4. $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2 R\sqrt{1+\tan^2\theta}}{(R - v_0\tan\theta(t-t_0))^2}$, tenendo conto che c'è anche la componente centripeta: $a_c = a_t\tan\theta$

Soluzione dell'esercizio 2.23

1. $\omega_0 = 0.942\ rad/s$, $v_b = 0.556\ m/s$
$\omega = \alpha t$, $2n\pi = \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\alpha = \frac{\omega^2}{4n\pi} = 0.0353\ rad/s^2$

$\vec{r}(t) = R\hat{u}_r$
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{u}_r + R\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$
$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left[\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[R\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\hat{u}_\theta$
   a) $\frac{dR}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = \alpha t$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$, quindi:
   $\vec{v} = R\alpha t\hat{u}_\theta = 0.071 \cdot t\hat{u}_\theta\ m/s$
   $\vec{a} = -R\omega^2\hat{u}_r + R\alpha\hat{u}_\theta = -2.5\cdot 10^{-3}\hat{u}_r + 0.071\hat{u}_\theta\ m/s^2$
   b) $\frac{dR}{dt} = v_b$, $\frac{d^2R}{dt^2} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, quindi:
   $\vec{v} = v_b\hat{u}_r + R\omega\hat{u}_\theta = 0.556\hat{u}_r + 1.884\hat{u}_\theta\ m/s$
   $\vec{a} = -R\omega^2\hat{u}_r + 2v_b\omega\hat{u}_\theta = -1.77\hat{u}_r + 1.05\hat{u}_\theta\ m/s^2$

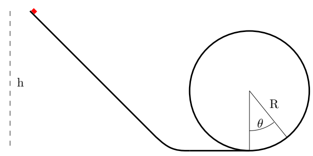
Soluzione dell'esercizio 2.24

1. $\Delta h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, $a = 2\left(\Delta h - v_0 t\right)/t^2 = 0.06\ m/s^2$
   $\vec{a} = a\hat{u}_\theta + v^2/R\hat{u}_r = a\hat{u}_\theta + (v_0 + at)^2/R\hat{u}_r$, per $t = 5s$, $\vec{a} = 0.06\hat{u}_\theta + 3.4\hat{u}_r\ m/s^2$

3 Dinamica del punto materiale

Esercizio 3.1 *Giro della morte*

Un carrellino di massa m scende lungo un piano inclinato con angolo α su una rotaia che successivamente forma una ruota completa di raggio R alla fine della discesa (giro della morte). La rotaia fornisce un vincolo unilaterale.



Determinare:

1. la reazione del vincolo $\vec{N}(\theta)$ lungo il giro della morte;
2. la velocità minima v_0 per compiere il giro;
3. l'altezza minima h per compiere il giro.

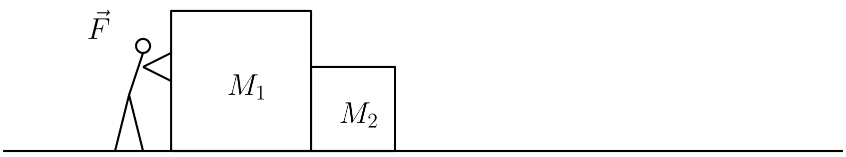
Esercizio 3.2

Un montacarichi di massa complessiva $M = 2000\ kg$ è sollevato da una fune ideale con carico di rottura $T_r = 28 \cdot 10^3\ N$. Si chiede:

1. la massima accelerazione verticale $\vec{a}$ che è in grado di sopportare.

Esercizio 3.3

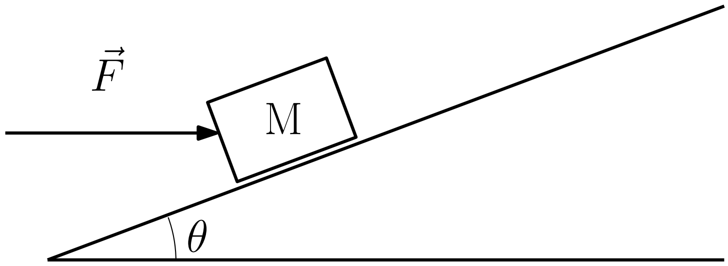
Due corpi di massa $M_1 = 2.3\ kg$ e $M_2 = 1.2\ kg$ sono appoggiati su un piano orizzontale privo di attrito e sono a contatto tra di loro. Sul corpo M_1 viene applicata una forza orizzontale, diretta verso M_2 di intensità $F = 3.2\ N$. Si chiede:



1. l'intensità della forza di contatto F_{21} tra le due masse;
2. F_{12}, se la forza viene applicata sul corpo M_2;
3. l'accelerazione a dei due corpi nei due casi.
4. che succede se c'è attrito con il piano?

Esercizio 3.4

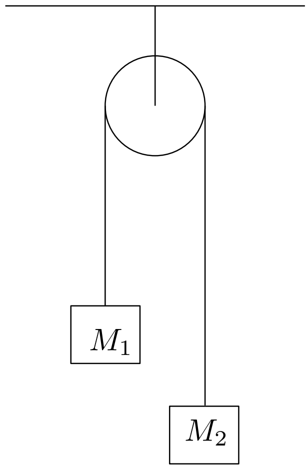
Una cassa di massa $M = 110\ kg$ è spinta in salita con velocità costante lungo un piano inclinato privo di attrito, che forma un angolo $\theta = 34°$ con l'orizzontale.



Determinare:

1. l'intensità della forza orizzontale F necessaria;
2. la forza $\vec{N}$ esercitata dal piano inclinato.

Esercizio 3.5 *Macchina di Atwood (1784)*

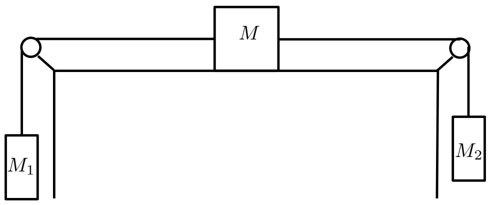


Due masse M_1 e M_2, con $M_2 > M_1$ sono collegate da una fune ideale ad una puleggia priva di attrito e massa trascurabile. Si chiede:

1. l'accelerazione $a_{1,2}$ delle due masse;
2. la tensione T della fune che collega le due masse;
3. la reazione vincolare T_0 del soffitto che sorregge tutto il sistema.
4. studiare i casi limite

Esercizio 3.6

Il sistema in figura è costuito da tre masse $M_1 = 5.0\ kg$, $M_2 = 7.6\ kg$, $M = 9.1\ kg$, una fune ideale, due carrucole di massa trascurabile, ed il tutto si muove senza attrito.

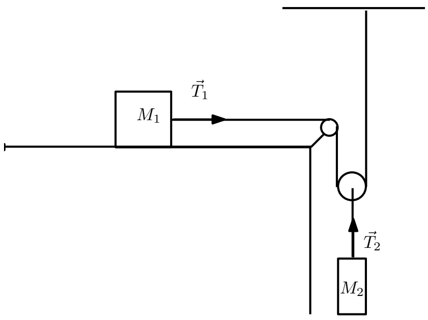


Calcolare:

1. l'accelerazione dei tre corpi a_i;
2. la tensione della corda T_1 e T_2 su M_1 e M_2, rispettivamente;
3. la forza risultante che agisce su M.

Esercizio 3.7

Il corpi identici di massa $M_1 = M_2 = 12.3\ kg$ nel sistema in figura sono collegati da una fune ideale e le pulegge hanno massa trascurabile, inoltre il corpo M_1 si muove senza attrito sul piano.
Si determini:

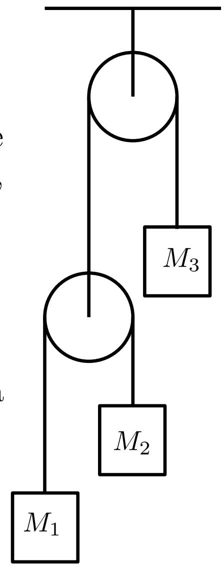


1. l'accelerazione dei due corpi a_1 e a_2;
2. la tensione T_1 e T_2 delle funi attaccate ai due corpi.

Esercizio 3.8

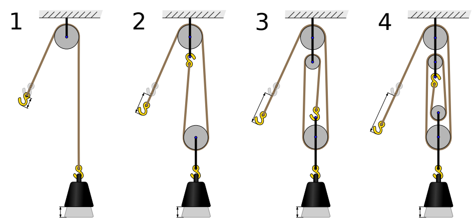
Si consideri il sistema in figura, dove le funi sono ideali, così come le carrucole. Le masse dei tre corpi sono rispettivamente $M_1 = 1.0\ kg$, $M_2 = 2.0\ kg$, $M_3 = 3.0\ kg$.
Si determini:

1. le accelerazione a_i dei tre corpi;
2. le tensioni T_i delle funi;
3. quale dovrebbe essere la massa M_3 affinché essa abbia accelerazione nulla;



Esercizio 3.9

Si considerino i quattro paranchi disegnati in figura[2].

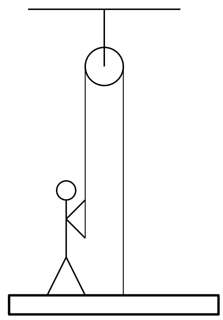


Per ciascuno, si determini, considerando le funi e le puleggie ideali:

1. di quanto bisogna tirare l'estremità libera della fune per ottenere un sollevamento Δh del peso;
2. la forza necessaria per tenere il peso in equilibrio;
3. la tensione del cavo collegato al soffitto.

[2] L'immagine è stata presa da Wikipedia, l'enciclopedia libera, 11/03/2014

Esercizio 3.10

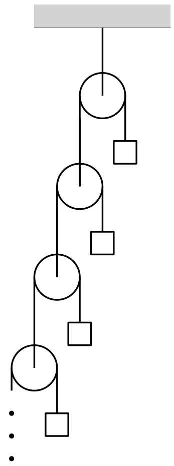


Un uomo di massa $M_u = 70\ kg$ si trova su una piattaforma di massa $M_p = 20\ kg$. La piattaforma è collegata tramite una fune inestensibile ad una carrucola priva di massa a sua volta fissata al soffitto. L'uomo afferra l'altra estremità della fune e cerca di tirarsi verso l'alto.
Si calcoli, in condizioni di equilibrio:

1. la forza con cui l'uomo deve tirare la fune;
2. la reazione vincolare esercitata dalla piattaforma sull'uomo;
3. la forza che esercita il soffitto sulla fune;
4. discutere le condizioni di equilibrio.
5. che succede se la carrucola e' doppia (o tripla. . .)

Esercizio 3.11 *Macchina di Atwood infinita*

Esercizio proposto da uno studente, non mi sono segnato il nome, sorry!

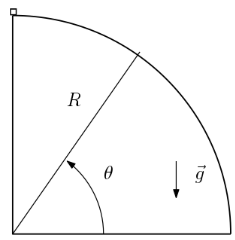


Si consideri la macchina in figura, che si estende identica all'infinito. Le masse siano tutte uguali m, le carrucole prive di massa e le funi ideali.
Si determini:

1. l'accelerazione della massa più alta;
2. la forza esercitata dal soffitto.

Esercizio 3.12

Un corpo si muove per caduta e senza attrito su un dosso semicilindrico, partendo dalla sommità da fermo.



Calcolare

1. il punto dove si stacca dalla superfice del cilindro;
2. è possibile fare lo stesso usando esclusivamente con la cinematica?
3. la distanza dal piede della discesa dove il corpo toca terra.

Soluzione dell'esercizio 3.1

1. $\vec{N} = \hat{u}_\perp \frac{m}{R^2} \left(v_0^2 + 3Rg\cos\theta - 2Rg \right)$
2. $v_0 \geq \sqrt{5Rg}$
3. $h \geq \frac{5}{2}R$

Soluzione dell'esercizio 3.2

1. $\vec{F} = M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}$. Proettando lungo un asse verticale diretto verso l'alto $T - Mg = Ma$, ovvero $a = \frac{T}{M} - g \leq \frac{T_r}{M} - g = 4.2\ m/s^2$

Soluzione dell'esercizio 3.3

1. Lungo il piano: $F - F_{21} = M_1 a$ e $R = M_2 a$, da cui $F_{21} = F\frac{M_1}{M_1+M_2} = 1.1\ N$
2. idem, con M_1 e M_2 scambiati: $F_{12} = F\frac{M_2}{M_1+M_2} = 2.1\ N$
3. $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M_{tot}} = 0.91\ m/s^2$ diretta verso destra; Nel secondo caso, l'accelerazione è la stessa, ma con direzione invertita (verso sinistra).
4. La forza totale esterna che agisce sul sistema è $F - \mu M_1 + M_2 g$ (attrito in direzione opposta al moto. Se $\mu > \frac{F}{(M_1+M_2)g} = 0.01$ allora i due corpi non si muovono.

Soluzione dell'esercizio 3.4

1. lungo il piano, l'equilibrio delle forze fornisce $F\cos\theta = Mg\sin\theta$ $F = Mg\tan\theta = 728\ N$;
2. ortogonlmente al piano, l'equilibrio fornisce: $N = F\sin\theta + Mg\cos\theta$, $N = \frac{Mg}{\cos\theta} = 1300\ N$.

Soluzione dell'esercizio 3.5

1. Per entrambe le masse vale, scegliendo un asse diretto verso il basso: $M_i g - T = M_i a_i$, inoltre $a_1 = -a_2 = a$. Quindi $a = \frac{M_1-M_2}{M_1+M_2}g$, che è negativa dato che $M_2 > M_1$, quindi la massa più leggera (M_1) risale, come atteso;
2. $T = \frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}g$.
3. Nell'ipotesi di carrucola di massa trascurabile, $T_0 = 2T = \frac{4M_1M_2}{M_1+M_2}g$.
4. Fissando M_2,
   - se $M_1 = 0$, allora $T_0 = 0$
   - se $M_1 = M_2$, allora $T_0 = 2M_2 g$
   - se $M_1 \gg M_2$, allora $T_0 = 4M_2 g$

Soluzione dell'esercizio 3.6

1. prendendo come riferimento gli assi di movimento dei tre corpi, con verso positivo per M_1 che sale verso l'alto:

$$\begin{aligned} M_1 a &= -M_1 g + T_1 \\ M a &= -T_1 + T_2 \\ M_2 a &= M_2 g - T_2 \end{aligned}$$

   da cui si ricava: $a = \frac{M_2 - M_1}{M + M_1 + M_2} g = 1.18\ m/s^2$
2. $T_1 = M_1 g \frac{M + 2M_2}{M + M_1 + M_2} = 65.6\ N$
   $T_2 = M_2 g \frac{M + 2M_1}{M + M_1 + M_2} = 54.9\ N$
3. $F_M = T_2 - T_1 = \frac{M(M_2 - M_1)}{M + M_1 + M_2} g = 10.7\ N$

Soluzione dell'esercizio 3.7

1.
$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= T_1 \\ M_2 a_2 &= M_2 a_2 - T_2 \\ M_c a_c &= T_2 - 2T_1 = 0 \text{carrucola} \\ a_1 &= 2a_2 \end{aligned}$$

   Da cui si ricava: $a_2 = \frac{M_2 g}{4M_1 + M_2} g = 1.96\ m/s^2$ e $a_1 = \frac{2M_1}{4M_1 + M_2} g = 3.92\ m/s^2$;
2. $T_1 = \frac{2M_1 M_2}{4M_1 + M_2} g = 48.3\ N$; $T_2 = 2T_1 = 96.5\ N$.

Soluzione dell'esercizio 3.8

1. considero un asse di riferimento verticale diretto verso il basso:

$$\begin{aligned} M_1 a_1 &= M_1 g - T_1 \\ M_2 a_2 &= M_2 g - T_1 \\ M_3 a_3 &= M_3 g - T_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ T_3 &= 2T_1 \end{aligned}$$

   Da cui ricavo: $a_1 = -4.0\ m/s^2$ (il corpo 1 sale), $a_2 = +2.9\ m/s^2$ (corpo 2 scende), e $a_3 = +0.58\ m/s^2$ (scende);
2. $T_1 = 13.8\ N$, $T_3 = 27.7\ N$;
3. equilibrio se $M_3 g = 2T_1$, e $T_1 = \frac{g}{1/M_1 + 1/M_2}$, il che fornisce: $M_3 = 1.33\ kg$.

Soluzione dell'esercizio 3.9

Paranco	Δx	F	T
1	Δh	Mg	$2Mg$
2	$2\Delta h$	$\frac{Mg}{2}$	$\frac{3}{2}Mg$
3	$3\Delta h$	$\frac{Mg}{3}$	$\frac{4}{3}Mg$
4	$4\Delta h$	$\frac{Mg}{4}$	$\frac{5}{4}Mg$

Soluzione dell'esercizio 3.10

1. $0 = M_u a_u = Mg - R - T$ e $0 = M_p a_p = M_p + R - T$, quindi $T = \frac{(M_u+M_p)g}{2} = 440\ N$
2. $R = \frac{(M_u-M_p)g}{2} = 245\ N$;
3. $F = 2T = 880\ N$;
4. $M_u \geq M_p$.

Soluzione dell'esercizio 3.11

1. Facciamo alcuno considerazioni:
   - la tensione della fune appesa alla prima carrucola è proporzionale a g;
   - la tensione della prima fune è il doppio di quella della seconda fune;
   - Il sistema appeso al soffitto è del tutto identico al sistema appeso alla seconda carrucola, con l'unica differenza che la prima carrucola è sottoposta ad accelerazione a. Quindi il sistema appeso alla seconda carrucola sente una gravità pari a $g - a$, visto che è non inerziale;
   - la prima considerazione è valida anche per la seconda carrucola, ma considerando la "gravità" effettiva.

   Quindi $\frac{T_1}{g} = \frac{T2}{g-a_1} = \frac{T_1/2}{g-a}$ che porge: $a = \frac{g}{2}$.
   Da notare che c'è anche una seconda soluzione valida, cioé $T_1 = 0$, il che equivale al caso limite per cui $m = 0$. In tal caso il sistema è libero e banale.
2. $ma_1 = -mg + T_1$, quindi $T_1 = \frac{3}{2}mg$, quindi $T_0 = 3mg$.
   Si può anche calcolare la massa equivalente al sistema infinito di carrucole. $m_{eq}a_1 = m_{eq}g - T_1$, quindi $m_{eq} = \frac{-T_1}{a_1-g} = 3m$
   Esercizio molto poco fisico.

Soluzione dell'esercizio 3.12

1. Scompongo il moto in direzione radiale $\hat{u}_\perp$ e parallela $\hat{u}_\parallel$ ad ogni punto della traiettoria. Lungo $\hat{u}_\parallel$ il vincolo non agisce, quindi ho solo la gravità: $a_\parallel = g\cos\theta\hat{u}_\parallel$.
   Integro per ottenere la velocità in funzione dell'angolo.
   $a_\parallel = \frac{dv}{dt}$, $ds = vdt$, e $ds = -Rd\theta$ (si noti il segno $-$ dovuto al fatto che l'angolo è definito rispetto alla direzione orizzontale - notare gli estremi di integrazione successivi - e quindi se il punto materiale scende l'angolo diminuisce).
   Mettendo insieme le tre esperessioni di prima si ottiene: $a_\parallel ds = -a_\parallel Rd\theta = \frac{dv}{dt}vdt = vdv$

$$\int_{\theta=\pi/2}^{\theta} a_{\parallel} R d\theta = -Rg \int_{\theta=\pi/2}^{\theta} \cos\theta d\theta = Rg(1-\sin\theta) = \frac{v^2(\theta)}{2}$$

Quindi $v^2(\theta) = 2Rg(1-\sin\theta)$
L'accelerazione normale alla traiettoria è quella centripeta necessaria per tenere il corpo attaccato alla superfice del cilindro.

$$a_{\perp} = \frac{v^2(\theta)}{R} = 2g(1-\sin\theta)$$

.
Nel punto in cui il corpo si stacca, tale accelerazione normale coincide con quella fornita dalla gravità, dato che il vincolo non fa più nulla.
Quindi $2g(1-\sin\theta) = g\sin\theta$, il che fornisce il risultato $\theta = a\sin\frac{2}{3} = 42°$

2. $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ Scompongo lungo $\hat{u}_{\perp}$e $\hat{u}_{\parallel}$, ottengo come prima $a_{\perp} = \frac{v^2(\theta)}{R} = 2g(1-\sin\theta)$.
   Quindi lungo la direzione $\hat{u}_{\perp}$: $N = mg\sin\theta - ma_{\perp} = mg(2-3\sin\theta)$. Il corpo si stacca quando $N = 0$, quindi $\theta = a\sin 2/3$
3. Conosco $v(\theta)$ e θ all'istante del distacco. Successivamente il moto è di tipo parabolico ($\vec{g}$) e le condizioni iniziali sono note: posizione e velocità.

3.1 Dinamica del punto materiale con attrito

Esercizio 3.13

Un corpo di massa $M = 3.57\ kg$ è appoggiato su un piano orizzontale scabro. Su di esso è applicata una forza $F_T = 7.68\ N$, diretta ad un angolo $\theta = 15°$ rispetto al piano.

1. Osservando che il moto è rettilineo uniforme, determinare μ.

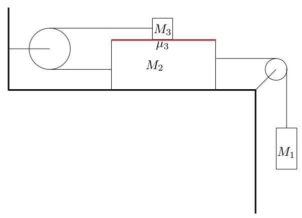
Esercizio 3.14

Un corpo si muove in salita lungo un piano inclinato di angolo $\theta = 30°$. Il piano è scabro ed ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.2$. La velocità iniziale del corpo è $v_0 = 4.2\ m/s$, e l'altezza del piano è $h = 40\ cm$.

Si determini:

1. il tempo Δt impiegato per raggiungere la quota h;
2. il coefficiente μ' perché la velocità alla quota h sia nulla.

Esercizio 3.15



I corpi del sistema in figura sono collegati da funi ideali e carrucole prive di massa. Le masse sono $M_1 = 5\ kg$, $M_2 = 7\ kg$, $M_3 = 1\ kg$. Il coefficiente di attrito dinamico tra le masse M_2 e M_3 vale $\mu_3^D = 0.2$.

Determinare:

1. Il coeff. di attrito statico minimo μ_3^S perchè il sitema sia in equilibrio.

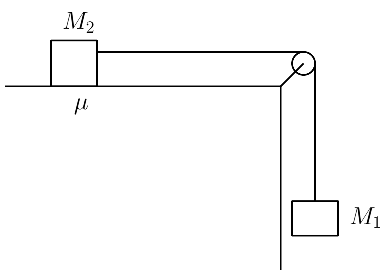
Se la massa M_1 si muove verso il basso:

2. le accelerazioni $a_{1,2,3}$ e le tensioni $T_{1,2}$;
3. idem se c'è attrito anche tra M_2 e il piano: $\mu_2^D = 0.2$;

Se la carrucola piú a sinistra è collegata al muro con una molla con $k = 300\ N/m$:

4. quale è il suo allungamento in condizioni statiche;
5. il periodo delle oscillazioni nel caso in cui il coefficiente di attrito statico sia grande;
6. l'allungamento statico se il corpo 2 e 3 scivolano l'uno sull'altro.

Esercizio 3.16



Il sistema in figura è costituito da due masse $M_1 = 4.5\ kg$ e $M_2 = 3.2\ kg$, unite da una fune e da una carrucola ideale. Tra il piano orizzontale e M_1 è presente attrito con un coefficente di attrito dinamico $\mu_d = 0.35$ e statico μ_s

Calcolare:

1. accelerazione a_1 e a_2;
2. tensione del filo T;
3. condizione per avere moto;

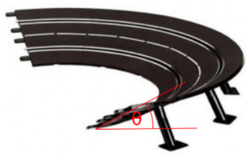
Esercizio 3.17

Ad una carrucola priva di massa sono collegati, tramite una fune ideale, due corpi, di massa $m_1 = 100\ g$ e $m_2 = 120\ g$, inizialmente fermi. Il corpo m_1 è libero di scorrere lungo la fune ed è frenato da una forza di attrito F_a costante. Si osserva che dopo un tempo $t_1 = 0.7\ s$, il corpo m_1 è sceso di $h = 60\ cm$.

Calcolare:

1. F_a;
2. a_2;
3. l'allungamento Δl del tratto di fune tra le due masse all'istante t_1.

Esercizio 3.18 *curva parabolica*



Un carrellino di massa $M = 12\ kg$ percorre una curva "parabolica" con raggio di curvatura $R = 2.8\ m$, che è inclinata di un angolo $\theta = 25°$ rispetto al piano orizzontale. Si calcoli:

1. la velocità v_0 per percorrere la curva senza attrito;
2. la reazione $\vec{N}_0$;

Nell'ipotesi che il coefficiente di attrito statico sia $\mu = 0.13$;

3. la reazione N_1 se la velocità è $v_1 = 4.0\ m/s$;
4. la forza d'attrito F_1 presente;
5. la velocità massima e minima $v_{max,min}$;
6. la reazione $N_{max,min}$ nei due casi.

Esercizio 3.19

Un corpo di massa $M = 5\ kg$ si trova su un piano scabro inclinato ad angolo $\theta = 30°$, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.4$.

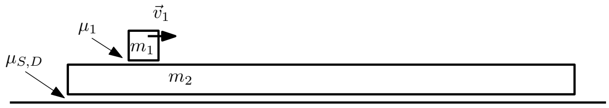
Il corpo, inizialmente fermo, è tirato verso l'alto da una fune con la tensione T minima necessaria per muovere il corpo. Si osserva che dopo aver percorso una distanza $\Delta x = 2\ m$ la velocità è $v = 3.7\ m/s$.

Calcolare:

1. il coefficiente di attrito statico μ_S;
2. calcolare il bilancio energetico durante la salita;
3. la massa m che devo aggiungere a M per avere un moto uniforme, nell'ipotesi che la tensione sia sempre la stessa.

Esercizio 3.20

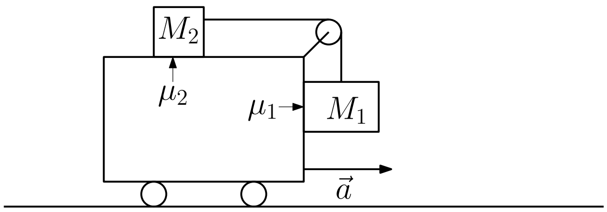
Su un piano scabro è appoggiata una tavola $m_2 = 3\ kg$ inizialmente in quiete. Il coefficiente di attrito statico e dinamico tra la tavola e il piano sono $\mu_S = 0.2$, $\mu_D = 0.1$, rispettivamente. Sulla tavola si trova un secondo corpo $m_1 = 2\ kg$, che si muove con velocità $v_1 = 3\ m/s$ su di essa. Tra il corpo e la tavola vi è attrito, con coefficiente pari a $\mu_1 = 0.6$.



1. Discutere le condizioni per il moto della tavola;
2. Determinare la distanza s_{1-2} percorsa dal corpo sulla tavola, fino a quando il corpo è fermo rispetto alla tavola;
3. la distanza s_2 percorsa dalla tavola rispetto al piano nello stesso periodo;
4. l'energia meccanica dissipata nel processo.

Esercizio 3.21

Del sistema in figura sono note le masse, M_1 e M_2, i coefficiente d'attrito statico μ_1 e μ_2 con i rispettivi piani d'appoggio, e che il carrello si muove di moto accelerato verso destra.

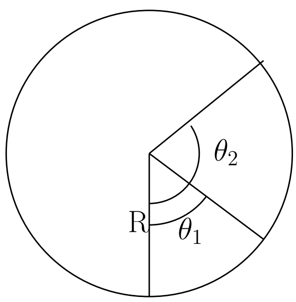


1. Si determini i valori dell'accelerazione a affinchè le due masse restino ferme;
2. Si discuta il caso limite $M_2 \ll M_1$ oppure $M_1 \ll M_2$
3. Si può risolvere il problema sia nel sistema del laboratorio (inerziale) che in un sistema solidarle con il carello (non inerziale). Verificare che le soluzioni siano le stesse.

Esercizio 3.22

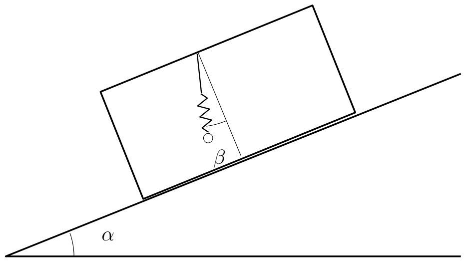
Un corpo si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio $R = 0.80\ m$ con periodo $T = 12.56\ s$. Da un certo istante è sottoposto ad una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -k\vec{v}$, e si arresta dopo un angolo $\theta_2 = 2\ rad$. Si chiede:

1. il rapporto k/m;
2. l'accelerazione $\vec{a}$ del corpo all'angolo $\theta_1 = 1\ rad$.



Esercizio 3.23

Il sistema in figura è costituito da una cassa di massa $M = 25\ kg$, appoggiata su un piano inclinato $\alpha = 20°$ scabro con $\mu = 0.18$, e da una massa $m = 4\ kg$ appesa al soffitto della cassa tramite una molla $k = 1500\ N/m$, in equilibrio rispetto alla cassa.

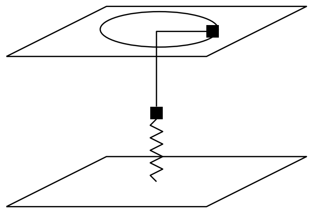


Determinare:

1. l'accelerazione a del sistema;
2. l'elongazione x della molla;
3. l'angolo β che la massa m forma con la verticale del soffitto della cassa.

Esercizio 3.24

Una massa $M_1 = 150\ g$ è collegata tramite una fune ideale ad una seconda massa $M_2 = 200\ g$ che si trova a riposo su un piano orizzontale liscio. M_1 è fissata al pavimento da una molla che inizialmente ha una compressione $\Delta x_0 = 19.6\ cm$. La massa M_2 viene messa in moviemento e ruota con $R = 25\ cm$ e $\omega = 0.5\ giri/s$.



Determinare:

1. la nuova compressione Δx_1 della molla;

Con della sabbia, si rende il piano scabro, e si osserva che la massa M_2 si arresta dopo aver percorso una spirale lunga $d = 39\ cm$, e che, dopo l'arresto, la molla è compressa $\Delta x_2 = 18\ cm$. Si chiede:

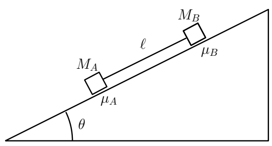
2. il coefficente di attrito dinamico di M_2.
3. la forza di attrito statico di M_2;
4. coefficiente attrito statico minimo μ_s

Esercizio 3.25

Due punti materiali di massa $M_A = 2\ kg$ e $M_B = 1\ kg$, sono appoggiati su un piano inclinato $\theta = 30°$, scabro, con coefficienti di attrito dinamico rispettivamente $\mu_A = 0.1$ e $\mu_B = 0.2$. Inizialemnte sono fermi a contatto, con M_B a monte di M_A, e vengono lasciati liberi di scivolare. I due corpi sono collegati da una fune ideale lunga $l = 1\ m$.

Calcolare:

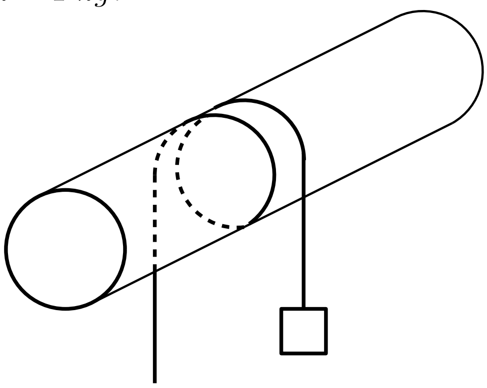
1. il tempo t necessario perchè la fune si estenda completamente;
2. l'accelerazione a con la fune tesa
3. la tensione della fune



Esercizio 3.26

Che forza devo applicare ad una fune avvolta su un palo per tenere sollevata una massa M in presenza di attrito statico tra la fune e il palo?

1. quanti giri di corda devo fare attorno al palo, se $\mu_s = 0.5$, per tenere sollevata una balena ($M = 180\ ton$), se la massa della corda dalla parte libera è pari a $m = 1\ kg$?



Soluzione dell'esercizio 3.13

1.

$$
\begin{aligned}
0 &= \quad F_T \cos\theta - \mu|N| \\
0 &= -Mg + \quad F_T \sin\theta + |N|
\end{aligned}
$$

da cui: $\mu = \frac{F\cos\theta}{Mg - F\sin\theta} = 0.22$.

Soluzione dell'esercizio 3.14

1. lungo il piano inclinato, in salita:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -g(\sin\theta + \mu\cos\theta) \\
\dot{x} &= v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t \\
x &= v_0 t - g/2(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2
\end{aligned}
$$

$\frac{h}{\sin\theta} = v_0 t - g/2(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2$, che fornisce due soluzione $t_{1,2} = 0.23\ s, \quad 1.04\ s$, la prima è quella di interesse.

2. Dalla equazione della velocità, ricavo t, ponendo $v = 0$, e metto t nell'equazione $\frac{h}{\sin\theta} = v_0 t - g/2(\sin\theta + \mu'\cos\theta)t^2$, ricavando: $\mu' = \tan\theta\left(\frac{v_0^2}{2gh} - 1\right) = 0.72$.

Soluzione dell'esercizio 3.15

1. Le equazioni della dinamica nel caso generale sono:

$$
\begin{aligned}
-M_3 a &= -T_2 + F_{att} \\
M_2 a &= -T_2 - F_{att} + T_1 \\
M_1 a &= -T_1 + M_1 g
\end{aligned}
$$

dove F_{att} è la forza di attrito statico o dinamico, a seconda del caso.
Nel caso statico, il modulo (e neppure il verso) della forza di attrito non è noto, ma si può usare il fatto che le accelerazioni dei tre corpi sono nulle: condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè il sistema sia, appunto, statico.
Risolvendo il sistema, si ottiene: $F_{att} = M_1 g/2$. Per calcolare il minimo coefficiente di attrito statico, è necessario che la forza d'attrito calcolata sia minore della mssima forza di attrito possibile, cioè che: $F_{att}^{max} = \mu_S M_3 g \leq F_{att} = M_1 g/2$, da cui si ricava $\mu_S \geq \frac{M_1}{2M_3} = 2.5$.
Si ricava anche che in queste condizioni $T_1 = M_1 g$ e $T_2 = M_1 g/2$.

2. si risolve il sistema di prima usando $F_{att} = M_3 g \mu_3$, e si ottiene:
$a = \frac{g(M_1 - 2\mu_3 M_3)}{M_1 + M_2 + M_3} = 3.47\ m/s^2$,
$T_1 = 31.7\ N$, $T_2 = 5.4\ N$.

3. il sistema è simile a quello di prima, ma la seconda equazione diventa:
$M_2a = -T_2 - \mu_3 M_3 g - \mu_2(M_3 + M_3)g + T_1$
da cui si ricava: $a = \frac{g(M_1 - 2\mu_3 M_3 - \mu_2(M_2+M_3))}{M_1+M_2+M_3} = 2.26\ m/s^2$ e poi le tensioni $T_1 = M_1(g-a) = 37.7\ N$, e $T_2 = M_3(a - \mu_3 g) = 4.43\ N$
4. Se la condizione è realizzata e si ha una situazione di equilibrio allora la forza della molla deve essere pari a $F_{el} = k\Delta l = 2T_2 = M_1 g$, da cui $\Delta l = \frac{M_1 g}{k} = 16.3\ cm$
5. Il sistema è del tutto analogo ad un punto materiale di massa M, appeso ad una molla di costante elastica k, visto che il sistema dei carrellini esercita una forza costante sulla molla, esattamente come nel caso della massa appesa.
Considerando i corpi 2 e 3 come un unico corpo, l'equazione della dinamica per i corpi (2+3) e 1 sono:

$$\begin{aligned}(M_2 + M_3)a &= T_1 - F_{el} \\ M_1 a &= M_1 g - T_1\end{aligned}$$

Questo mi permette immediatamente di trovare le equazioni del moto del sistema, che saranno di tipo oscillatore armonico

$$(M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x} + kx - M_1 g = 0$$

In quel caso, la forza costante $M_1 g$ determina solamente la posizione di equilibrio del moto armonico, mentre il periodo risulta essere
$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, dove $M = M_1 + M_2 + M_3$ è la massa inerziale del punto.
6. come prima: $\Delta l = \frac{2T_2}{k} = 3.6\ cm$
7. *Discussione sulle condizioni di μ_s con la molla*
Si può studiare il caso in cui la molla non sia inizialmente in tensione (e quindi $T_2 = 0$). In questo caso rimane la forza d'attrito statico tra M_2 e M_3. Se tale forza è sufficente da tenere ferme le due masse tra di loro, di fatto abbiamo un unico punto materiale di massa: $M_2 + M_3$.
In questo caso, sempre nell'istante iniziale quando la molla non é in tensione, $a = \frac{M_1 g}{M_1+M_2+M_3}$. Visto che su M_3 la forza di attrito statico é l'unica forza agente, e al massimo vale $\mu_s M_3 g$ allora risulta: $F_{att} = M_3 a = \frac{M_3 M_1 g}{M_1+M_2+M_3} \le \mu_s M_3 g$, e la condizione su μ_s risulta $\mu_s \ge \frac{M_1}{M_1+M_2+M_3} = 0.38$.
Via via che la molla si allunga esercita una forza elastica di richiamo sempre piu' grande, proporzionale al suo allungamento. La tensione esercitata sul corpo M_3 é pari a $2T_2 = F_{el}$, come si ricava considerando la carrucola attaccata alla molla.
Le tensione T_2 varia da un valore iniziale nullo (quando la molla e' a riposo) ad uno massimo quando la molla è al suo massimo allungamento. Nel secondo caso il sistema è istantaneamente fermo (l'oscillazione sta invertendo la direzione), e quindi e' del tutto analogo al sistema statico che abbiamo studiato precedentemente.
La condizione per cui i corpi M_3 e M_2 restino fermi l'uno rispetto all'altro é quella studiata precedentemente $\mu_S \ge \frac{M_1}{2M_3} = 2.5$
Quindi se la $\mu_s > 2.5$ i corpi 2 e 3 restano sempre fermi l'uno rispetto all'altro e il sistema è semplice. Se $\mu_s < 0.38$ i corpi 2 e 3 scorrono l'uno rispetto all'altro

(e il sistema diventa piu' complicato). Se infine μ_s ha un valore intermedio, i due corpi iniziano fermi e si staccano durante l'oscillazione, e il sistema diventa davvero complicato da risolvere.

Soluzione dell'esercizio 3.16

1. $a_1 = a_2 = g\frac{M_1 - M2\mu}{M_1 + M_2} = 4.3\ m/s^2$
2. $T = \frac{gM_1M_2(1+\mu)}{M_1+M_2} = 24.0\ N$
3. $M_1 > \mu_d M_2$ il sistema continua a muoversi (vero). Se inizialmente fermo, inizia a muoversi se $\mu_s < \frac{M_1}{M_2}$

Soluzione dell'esercizio 3.17

1. m_1 si muove con accelerazione costante, visto che su di esso agiscono due forze costanti: posso ricavarmi tale accelerazione dall'eq. del moto: $h(t_1) = 1/2a_1t_1^2$. Quindi uso l'eq. della dinamica su m_1: $F_R = m_1g - F_a = m_1a_1$, e infine ricavo $F_a = m_1\left(g - \frac{2h}{t_1^2}\right) = 0.735\ N$
2. Sul corpo a_2 sono esercitate due forze: $F_R = m_2g - T = m_2g - F_a$, quindi $a_2 = g - F_a/m_2 = 3.67\ m/s^2$
3. l'accelerazione del corpo m_1 rispetto alla fune è: $a_1' = -a_1 + a_2 = 6.12\ m/s^2$, quindi $\Delta l = 1/2a_1't_1^2 = 1.5\ m$
   In alternativa, si può calcolare la velocità finale di m_1: $v_1 = a_1t$, quella di m_2: $v_2 = a_2t$, la discesa di m_2: $h_2 = \frac{a_2t^2}{2}$ (la discesa di m_1 è h), e fare il bilancio energetico del sistema.

$$\begin{aligned} E_{fin} - E_{ini} &= L(F_a) \\ \left(-m_1gh - m_2gh_2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - 0 &= -F_a\Delta l \end{aligned}$$

da cui mi ricavo Δl.

Soluzione dell'esercizio 3.18

1. in direzione radiale: $Mv_0^2/R = N_0\sin\theta$, in direzione verticale: $0 = N_0\cos\theta - Mg$, quindi $v_0 = \sqrt{Rg\tan\theta} = 3.6\ m/s$;
2. $N_0 = \frac{Mg}{\cos\theta} = 130\ N$;
3. $v_1 > v_0$, quindi la forza di attrito è rivolta verso l'interno della curva. Le equazioni della dinamica nelle due direzioni radiale e verticale diventano:

$$\begin{aligned} N_1\sin\theta + F_1\cos\theta &= Mv_1^2/R \\ N_1\cos\theta - F_1\sin\theta - Mg &= 0 \end{aligned}$$

da cui ricavo: $N_1 = Mv_1^2/R\sin\theta + Mg\cos\theta = 135.7\ N$;

4. $N_1 = Mv_1^2/R\cos\theta - Mg\sin\theta = 12.4\ N < \mu N_1 = 17.6\ N$;
5. stesse equazioni di prima, adesso $F_{max} = \mu N_1$, sempre diretto verso l'interno della curva.

$$\begin{aligned} N_{max}\sin\theta + \mu N_{max}\cos\theta &= Mv_1^2/R \\ N_{max}\cos\theta - \mu N_{max}\sin\theta - Mg &= 0 \end{aligned}$$

   $v_{max} = \sqrt{gR\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}} = 4.2\ m/s$
   Per la v_{min} la forza di attrito è diretta verso l'esterno. $v_{min} = \sqrt{gR\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}} = 2.95\ m/s$
6. $N_{max} = \frac{Mg}{\cos\theta-\mu\sin\theta} = 138.1\ N$
   $N_{min} = \frac{Mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta} = 122.3\ N$.

Soluzione dell'esercizio 3.19

1. Lungo il piano: $T - Mg\sin\theta - \mu_S Mg\cos\theta = Ma$
   Per muovere il corpo, $a \geq 0$, da cui $T = Mg\sin\theta + \mu_S Mg\cos\theta = 58.5\ N$.
   Durante il moto: $Ma = T - Mg\sin\theta - \mu_D Mg\cos\theta$, da cui $a = g(\mu_S - \mu_D)\cos\theta$
   Cinematica: $\Delta x = \frac{v^2}{2a}$, quindi $\mu_S = \mu_D + \frac{v^2}{2g\cos\theta\Delta x} = 0.8$
   Oppure calcolo il lavoro e l'energia cinetica: $L = Mg(\mu_S - \mu_D)\Delta x = 1/2Mv^2$ con identico risultato.
2. Lavoro positivo è solo quello della tensione: $L_T = T\Delta x = 117\ N$. La forza d'attrito dissipa $L_A = \mu_D Mg\cos\theta\Delta x = 34\ J$. Parte del lavoro speso serve per alzare la quota del corpo $L_g = Mg\Delta x\sin\theta = 49\ J$. Infine, il corpo ha una energia cinetica finale $E_K = 1/2Mv^2 = 34\ J$.
   Il bilancio completo è: $L_T = L_A + L_g + E_K$.
   Attenzione ai segni: la tensione fa lavoro positivo sul sistema, mentre la forza peso e la forza d'attrito fanno un lavoro negativo. Con questi segni, il bilancio energerito è in generale: $\sum L = \Delta E_k$.
   Nel nostro caso ho spostato al secondo membro (cambiando di segno) i lavori negativi fatti sul sistema. In questo modo è più evidente quali forze forniscono, tramite il loro lavoro, energia al sistema e quali ne sottraggono.
3. $0 = Ma = T - (M+m)g\sin\theta - \mu_D(M+m)g\cos\theta = Mg\sin\theta + \mu_S Mg\cos\theta - (M+m)g\sin\theta - \mu_D(M+m)g\cos\theta$, da cui $m = \frac{M(\mu_S-\mu_D)\cos\theta}{\sin\theta+\mu_D\cos\theta} = 2.05\ kg$

Soluzione dell'esercizio 3.20

1. La tavola si muove se la forza di attrito del corpo con la tavola è maggiore di quella (statica) della tavola con il piano.

$$\mu_1 mg \geq \mu_S(m_1 + m_2)g$$

   che è verificata nel nostro caso.

2. $a_1 = -\mu_1 g$, $a_2 = \frac{+\mu_1 g - \mu_D(m_1+m_2)g}{m_2}$, accelerazione relativa del corpo rispetto alla tavola: $a_{1-2} = a_1 - a_2$
   Istante di arresto $t^\star = \frac{v_1}{a_{1-2}}$, $s_{1-2} = v_1 t^\star + \frac{1}{2} a_{1-2} t^{\star 2} = 0.55\ m$
3. $s_2 = a_2 t^{\star 2} = 0.30\ m$
4. $W_D = \mu_1 m_1 g s_{1-2} + \mu_D(m_1+m_2) g s_2 = 7.2\ J$
   Da notare che il primo termine dell'enegia dissipata ha la forma $F \cdot \Delta s$, dove Δs è lo spazio percorso da m_1 rispetto a m_2. Possiamo arrivare a questa formulazione in modo più chiaro se lavoriamo completamente nel sistema di riferimento del laboratorio. In tale sistema, se voglio calcolare il lavoro della forza d'attrito tra m_1 e m_2, devo fare la somma del lavoro fatto su m_1 (che è negativo) e quello fatto su m_2, che invece e' positivo.
   Il primo vale $L_1 = -\mu_1 m_1 g(s_1)$, dove s_1 è lo spazio percorso da m_1 prima di fermarsi nel sistema del laboratiorio: $s_1 = s_(1-2)+s_2$, quindi $L_1 = -\mu_1 m_1 g(s_{2-1} + s_2)$
   Il secondo vale $L_2 = +\mu_1 m_1 g(s_2)$ e la somma dei due fornisce $L_{1+2} = -\mu_1 m_1 g s_{1-2} = -W_D$. Per convincersi, vi invito a ragionare su quello che succede se m_2 è bloccata nel sistema del laboratorio.
   Si può anche calcolare $W_D = \Delta E_K$, ma occorre fare attenzione che all'istante $t^\star$ la tavola si sta ancora muovendo, quindi l'energia cinetica finale non è nulla.

Soluzione dell'esercizio 3.21

1. Scrivo le equazioni della dinamica per i due corpi. Prendo un riferimento cartesiano inerziale (laboratorio) xy, e arbitrariamente il verso delle forze di attrito statico come se il corpo m_1 scendesse, quindi F_1^{att} diretta verso l'alto, e F_2^{att} diretta verso sinistra nel disegno ("all'indietro").
   L'accelerazione di m_1 ha in generale due componenti: verticale (se cade o risale, nulla se ferma) e orizzontale dovuta al moto del carrello (accelerazione a): scompongo quindi le eq. lungo $\hat{x}$ e $\hat{y}$ per m_1

$$\begin{aligned} m_1 a\hat{x} = m_1 a &= N_1 \\ m_1 a\hat{y} = 0 &= -m_1 g + T + F_1^{att} \\ m_2 a_2 = m_2 a &= T - F_2^{att} \end{aligned}$$

   dove N_1 è la reazione vincolare del piano verticale su m_1, cui è dovuta la forza di attrito tra il piano verticale e m_1. Si noti che F^{att} sono incognite, sappiamo solo che $|F_1^{att}| \le \mu_1 N$, e $|F_2^{att}| \le \mu_2 m_2 g$.
   Dalle eqauzioni del moto mi ricavo:

$$\begin{aligned} |F_1^{att}| = |m_1 g - T| &\le \mu_1 m_1 a \\ |F_2^{att}| = |T - m_2 a| &\le \mu_2 m_2 g \end{aligned}$$

   da cui ricavo, eliminando la tensione T sommando a membro a membro le due equazioni precedenti.

$$-\mu_1 m_1 a - \mu_2 m_2 g \le m_1 g - m_2 a \le \mu_1 m_1 a + \mu_2 m_2 g$$

Dalle due disequazioni ricavo l'accelerazione minima è: $a \geq \frac{(m_1-\mu_2 m_2)g}{(m_2+\mu_1 m_1)}$
e quella massima è: $a \leq \frac{(m_2+\mu_1 m_1)g}{(m_2-\mu_1 m_1)}$

2. Si trova che $a \leq \frac{g}{\mu_1}$ oppure $a \geq \frac{-g}{\mu_1}$. Il secondo caso corrisponde al caso fisico in cui i corpi vengono accelerati verso sinistra (nel disegno), e quindi è fisico solo se il vincolo tra il piano verticale e M_1 è bilaterale (per esempio se c'è una rotaia con un aggancio di qualche tipo). In tal caso la reazione vincolare N_1 può essere diretta anche verso sinistra e causare una forza di attrito statico che può binalciare la forza peso.
Se il vincolo è unilaterale (piano verticale senza rotaia), allora non è un caso realizzabile fisicamente.
Il case $M_2 \gg M_1$ è più semplice, e fornisce semplicemente $|a| \leq \mu_2 g$. Se la massa appesa è trascurabile, lo è anche la tensione, quindi sul corpo M_2 agisce orizzontalmente solo la forza $F^2_{att} \leq \mu_2 M_2 g$, che deve controbilanciare la forza apparente $M_2 a$, da cui si ricava direttamente il limite su a.

Soluzione dell'esercizio 3.22

1. Lungo la direzione tangente: $ma_T = -kv$, quindi $m\frac{dv}{dt} = -kv$. La soluzione di questa equazione differenziale è $v(t) = v_0 e^{-k/mt}$.
A me interessa non la legge oraria, ma la velocità in funzione dell'angolo, che posso ricavare da: $mdv = -kvdt = -kds = -kRd\theta$, da cui $v(\theta) = v_0 - kR/m\Delta\theta$, con $v_0 = 2\pi R/T$. La velocità si annulla quando $\frac{2\pi R}{T} = \frac{kR\Delta\theta}{m}$, da cui ricavo $\frac{k}{m} = \frac{2\pi}{T\theta_2} = 0.25\ s^{-1}$.
Se si ricava la legge oraria, si trova $v(t) = v_0 e^{-kt/m}$, e $\theta(t) = \frac{mv_0}{kR}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$. Quindi la velocità si annulla in un tempo infinito, ma in questo tempo l'angolo percorso è finito $\theta = \frac{mv_0}{kR}$. Quindi la soluzione del problema è tecnicamente corretta, anche se il problema stesso non è molto fisico.
2. L'accelerazione totale è data dalla compomente tangeziale e da quella centripeta: $\vec{a} = -\frac{k}{m}v\hat{u}_\parallel + \frac{v^2}{R}\hat{u}_\perp = 0.07\hat{u}_\parallel + 0.098\hat{u}_\perp$

Soluzione dell'esercizio 3.23

1. prendo un riferimento parallelo $\parallel$ e ortogonale $\perp$ al piano inclinato.

$$\begin{aligned} m : ma_\parallel &= mg\sin\alpha - kx\sin\beta \\ 0 &= -mg\cos\alpha + kx\cos\beta \\ M : Ma_\parallel &= Mg\sin\alpha + kx\sin\beta - \mu N \\ 0 &= -Mg\sin\alpha - kx\sin\beta + N \end{aligned}$$

Da cui ricavo $a_\parallel = g(\sin\alpha - \mu\sin\beta) = 1.70\ m/s^2$, $\tan\beta = \frac{g\sin\alpha - a_\parallel}{g\cos\alpha} = 0.18$, e $x = \frac{mg\cos\alpha}{k\cos\beta} = 2.5\ cm$.

Soluzione dell'esercizio 3.24

1. $k = \frac{M_1 g}{\Delta x_0} = 7.5\ N/m$.

$$T = M_2 \omega^2 R$$
$$M_1 g - T = k\Delta x_1$$

$T = 0.49\ N$, $\Delta x_1 = \frac{M_1 g - T}{k} = \Delta x_0 - \frac{M_2 \omega^2 R}{k} = 13\ cm$
2. $\mu_D M_2 g d = \frac{1}{2} M_2 \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} k \left(x_1^2 - x_2^2\right) + M_1 g \left(\Delta x_2 - \Delta x_1\right)$, quindi $\mu_D = 0.02$
3. $F_{att} = M_1 g - k\Delta x_2 = 0.21\ N$,
4. quindi $\mu_S \geq \frac{M_1 g - k\Delta x_2}{M_2 g} = \frac{k(\Delta x_0 - \Delta x_2)}{M_2 g} = 0.12$

Soluzione dell'esercizio 3.25

TODO

Soluzione dell'esercizio 3.26

1. Esempio numerico: $T = T_0 e^{-\mu\Delta\theta}$

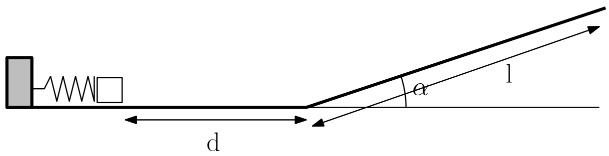
	T_0/T	
	$\mu = 0.2$	$\mu = 0.5$
1 giro	3.5	23
2 giri	12.3	535
3 giri	43	$1.2{\cdot}10^4$
4 giri	152	$2.8{\cdot}10^5$
5 giri	535	$6.6{\cdot}10^6$

Per tenere sollevata una ($M \sim 180\ ton$) mi basta avvolgere per ≈ 3.5 giri una fune su un palo con $\mu = 0.5$, applicando una forza di 1 kgp (che potrebbe essere il peso della corda stessa).

3.2 Dinamica del punto materiale: energia

Esercizio 3.27

Nel sistema in figura un carrello di massa $m = 0.25\ kg$ è appoggiato ad una molla ($k = 2000\ N/m$) compressa con $\Delta x = 5\ cm$. La molla viene rilasciata, e il carrello percorre un piano orizzontale lungo $d = 1.0\ m$, e quindi uno inclinato di un angolo $\alpha = 30°$.

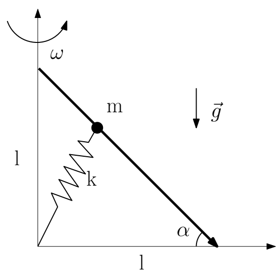


Calcolare il percorso lungo il piano inclinato:

1. se non c'è attrito;
2. se c'è attrito nel piano orizzontale con $\mu_D = 0.25$;
3. se c'è attrito anche nel piano inclinato con $\mu_D = 0.25$;
4. la compressione massima della molla $\Delta x'$ quando il carrello torna indietro.

Esercizio 3.28

L'asta in figura è inclinata di 45° rispetto alla verticale ($l = 2\ m$): lungo di essa scorre senza attrito una massa $m = 0.8\ kg$, che è collegata tramite una molla ideale ($k = 12\ N/m$, $l_0 = 0\ m$) all'origine degli assi. La massa è ferma quando si trova all'estremità superiore dell'asta.
Si chiede:



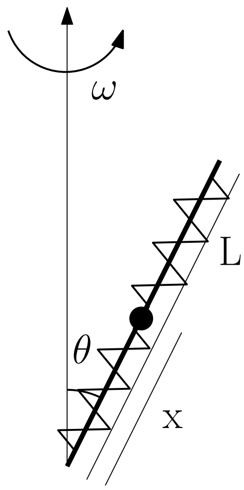
1. la posizione di equilibrio;
2. il periodo delle piccole oscillazioni;
3. la posizione per cui ha velocità massima;
4. la velocità all'estremità inferiore dell'asta;
5. che succede se il sistema ruota con ω costante attorno all'asse verticale?

Esercizio 3.29

Un'asta lunga L è incernierata ad una estremità, e ruota con ω costante attorno ad un asse. Lungo l'asta, un corpo di massa m è collegato alle due estremità dell'asta stessa da due molle identiche (k, l_0).

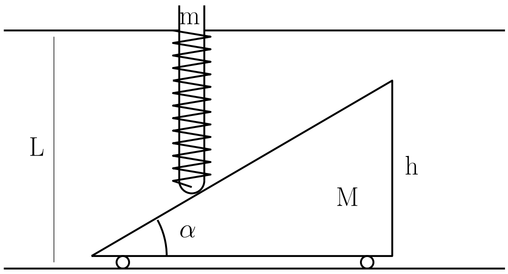
Determinare:

1. la posizione di equilibrio del corpo;
2. le condizioni per cui l'equilibrio è stabile;
3. la frequenza delle piccole oscillazioni;
4. la reazione vincolare dell'asta sul corpo.



Esercizio 3.30

Il carrello ($M = 1.2\ kg$, $h = 12\ cm$ $\alpha = 30°$) in figura è spinto verso il basso da un'asta di massa $m = 0.5\ kg$ e da una molla ($k = 35\ N/m$,$l_0 = L$), vincolata a muoversi lungo la direzione verticale. La posizione iniziale del carrello è con l'asta in corrispondenza del bordo più alto, con carrello fermo.



Determinare, supponendo trascurabili gli attriti:

1. la velocità finale del carrello;
2. la reazione del piano inclinato del carrello quando l'asta è a metà del carrello;
3. la reazione del piano orizzontale su cui è appoggiato il carrello nello stesso istante.

Esercizio 3.31

Un paracadutista di $M = 90\ kg$ (compresa l'attrezzatura) si lancia da $h = 3000\ m$. Ad una quota di $h_1 = 1000\ m$ apre un paracadute emisferico, $A = 72\ m^2$, coefficiente di resistenza $C_x = 1.28$.

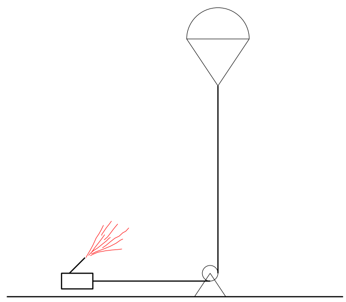
Si assuma: $\rho_{aria} = 1.2\ kg/m^3$, in caduta libera $C_x = 1.1$ e sezione trasversale uomo in caduta libera $A_u \approx 0.5\ m^2$.

Determinare:

1. la velocità quando apre il paracadute;
2. la velocità quando tocca terra;
3. la tensione massima delle funi del paracadute.

Esercizio 3.32

Un carrello di massa 135 000 lb è collegato tramite un cavo ideale e una carrucola ad un paracadute emisferico di diametro 34 m. Il carrello è spinto da 4 razzi in grado di fornire una spinta di $F = 3.5 \cdot 10^4\ lbf$ per $10s$.
Si chiede:



1. la velocità limite del sistema;
2. la velocità di discesa del paracadute dopo $10s$;
3. la massima tensione del cavo;

Fonte: Rocket Sled Parachute Design Verification, NASA

Esercizio 3.33 *Moto armonico con attrito radente*

Un corpo di massa m è collegata ad una molla di massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla, fissata ad una estremità. Il corpo è libero di muoversi su un piano, dove è presente un coefficente di attrito dinamico μ, e può passare da una parte all'altra del punto ove è fissata la molla.

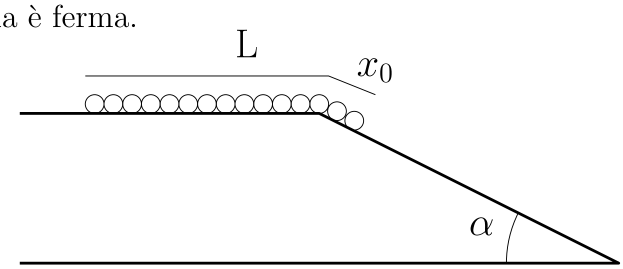
All'istante $t = 0s$, il corpo è fermo ad una distanza L dal fulcro della molla.

Determinare:

1. l'equazione del moto del corpo;
2. l'energia dissipata dalla forza d'attrito;
3. devo preoccuparmi della forza di attrito statico?

Esercizio 3.34

Una catena lunga L e massa complessiva M, è appoggiata su un piano privo di attrito, in modo tale che una sua parte lunga x_0 si trovi su un piano inclinato di un angolo α. Inizialmente la catena è ferma.

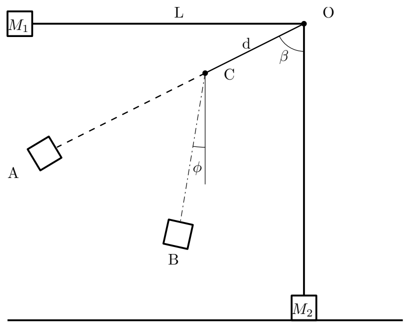


Determinare:

1. l'equazione del moto della catena;
2. la velocità della catena nell'istante in cui si trova completamente sul piano inclinato.

Esercizio 3.35

Due masse $M_1 = 1.2\ kg$ e $M_2 = 3\ kg$ sono collegate da una fune ideale, la seconda appoggiata ad un piano orizzontale, la prima ad una distanza $L = 0.95\ m$ e alla stessa altezza di un chiodo fisso. M_1 viene lasciata cadere da ferma, e la fune incontra un secondo chiodo ad un angolo $\beta = 60°$, che si trova ad una distanza $d = 67.8\ cm$ dal primo chiodo.



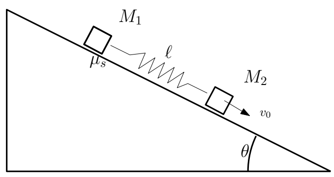
Calcolare:

1. la velocità di M_1 appena prima di incontrare il secondo chiodo (A);
2. la tensione della fune nello stesso istante;
3. la velocità angolare di M_1 prima e dopo l'incontro con C;
4. l'angolo ϕ per cui la massa M_2 si solleva.

Esercizio 3.36

Due punti materiali si trovano su un piano inclinato con $\theta = 10°$: hanno massa $M_1 = 5\ kg$ (a monte) e $M_2 = 2\ kg$ (a valle) e sono collegato da una molla ($k = 10\ N/m$) a riposo. M_1 ha coeff. di attrito statico $\mu_s 0.3$ ed è fermo, mentre M_2 non ha attrito e scende con $v_0 = 0.5\ m/s$.

Calcolare, nell'istante iniziale:



1. accelerazione di M_2;
2. forza di attrito si M_1;
3. il centro delle oscillazioni di M_2 e il periodo;
4. il max/min allungamento della molla;
5. l'allungamento max/min della molla perchè M_1 resti fermo;
6. la velocità di M_2 è tale da far muovere M_1?

Esercizio 3.37

Due masse $M_1 = 2.0\ kg$ e $M_2 = 4.0\ kg$ sono collegate da una molla con costante elastica $k = 50\ N/m$ disposta verticalmente.

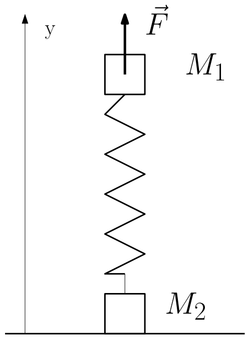
Inizialmente M_2 è appoggiata al pavimento, mentre M_1 si trova appoggiata sopra di essa, entrambe a riposo. M_1 è vincolata a muoversi solo in verticale.

Determinare:

1. la compressione della molla e reazione vincolare sul piano;

Successivamente, la massa M_1 viene tirata verso l'alto da una forza costante $\vec{F} = 15\ N$. Calcolare:

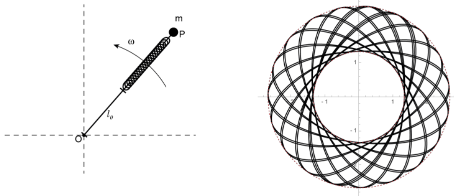
2. accelerazione iniziale di M_1;
3. la velocità di M_1 quando la molla è a riposo;
4. il massimo allungamento della molla e accelerazione di M_1 in quell'istante;



5. discutere le condizione su M_2 perchè resti appoggiata.

Esercizio 3.38

Un filo ideale $l_0 = 0.66\ m$ è fissato in un punto ed è collegato all'alta estremintà ad una molla $k = 150\ N/m$ e lunghezza a riposo nulla. Alla molla è fissata una massa $m = 25\ kg$ che si muove senza attrito su un piano orizzontale. Inizialmente la massa ha distanza $r_0 = 1.33\ m$ dal centro e si muove ortogonalmente al raggio.



a) b)

1. ω_0 per avere moto circolare stabile

Il moto inizia alla stessa distanza, ma con $\omega_1 = 4\ rad/s$, sempre con velocità ortogonale al raggio.

2. v_2 quando $r_2 = 2.0\ m$;
3. ω_2 nello stesso istante.

Soluzione dell'esercizio 3.27

1. Conservazione energia: $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = mgL\sin\alpha$. $L = 2.0\ m$
2. $\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\mu_D d = mgL\sin\alpha$. $L = 1.5\ m$
3. $\frac{1}{2}k\Delta x^2 - mg\mu_D d - mg\mu_D L\cos\alpha = mgL\sin\alpha -$. $L = 1.07\ m$
4. $E_{fin} = 2L(F_{att}) + E_{ini}$, $\Delta x' = \sqrt{\left(\Delta x^2 - \frac{4dmg\mu_D(d+L\cos\alpha)}{k}\right)} = 1.2\ cm.$
   Devo considerare che al ritorno il mio corpo percorre 1.4 cm in meno che all'andata e quindi che l'energia dissipata al ritorno è minore di quella dell'andata? Discutere.

Soluzione dell'esercizio 3.28

1. Si può calcolare l'equazione del moto. Prendo come coordinata per descrivere il sistema la posizione della massa lungo l'asta, a partire dal punto medio, diretta verso l'alto, e la chiamo s. Quindi $s = l/2$ se la massa si trova all'estremità superiore dell'asta (asse di rotazione per l'ultimo punto) e $s = -l/2$ per il punto 4.
   Le forze che agiscono sono quella peso, e quella elastica, che sono conservative, e la razione vincolare dell'asta che non compie lavoro.
   Se considero le componenti delle due forze lungo s, quindi parallele all'asta, ho per la forza peso: $F^{peso}\hat{s} = -mg/\sqrt{2}$.
   Per quella elastica chiamo ϕ l'angolo che la molla forma con la bisettrice del primo quadrante (che corrisponde alla posizione $s = 0$ della massa). La forza elastica è pari a $F^{el} = ks/\sin\phi$, diretta verso il centro del sistema xy di assi coordinati. La sua componente lungo l'asse dell'asta, e quindi lungo s è pari a $F^{el}\sin\phi$, quindi pari a $F^{el}\hat{s} = -ks$. Di fatto è come se ci fosse una molla con la stessa costante elastica k tra la massa m e il punto centrale dell'asta $s = 0$.
   Fatte queste considerazioni, $F^{ris}\hat{s} = ma\hat{s}$, $F^{peso} + F^{el} = m\ddot{s}$, da cui posso ricavare l'eq differenziale del moto:
   $$\ddot{s} + \frac{k}{m}s + \frac{g}{\sqrt{2}} = 0$$
   che ha come soluzione, posto $\omega^2 = \frac{k}{m}$:
   $$s(t) = \frac{l - g/\omega^2}{\sqrt{2}}\cos(\omega t) - \frac{g}{\sqrt{2}\omega^2}$$
   quindi la poszione di equilibrio risulta: $s_0 = -\frac{g}{\sqrt{2}\omega^2} = -0.46\ m$.
   Visto che il sistema è conservativo, posso anche cercare i minimi dell'energia potenziale:
   $$U(s) = \frac{mgs}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2}\left(s^2 + \frac{l^2}{2}\right)$$
   che ha minimi come prima. Da notare che per l'en potenziale elastica uso tutta la lunghezza della molla $l_{molla} = \sqrt{s^2 + \frac{l^2}{2}}$, e, dato che nell'energia potenziale della molla compare il quadrato di l_{molla}: $U_{el} = 1/2kl^2_{molla}$, c'è una parte costante e una che dipende da s^2, come se ci fosse solo la molla lungo l'asse.

2. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.62\ s$;
3. è la posizione di equilibrio: la velocità massima risulta: $v = \sqrt{2gl + \frac{kl^2}{2m} + \frac{mg^2}{2k}} = 8.5\ m/s$
4. Conservazione dell'energia: $mgl = 1/2mv^2$, quindi $v = \sqrt{2gl} = 6.26\ m/s$
5. Mi metto in un sistema di riferimento non inerziale solidale con l'asta. Il problema è esattamente quello di prima a patto che consideri la presenza delle forze non inerziali, in questo caso quella cosiddetta centrifuga. Il sistema è ancora conservativo. Attenzione che la conservazione dell'energia totale nei sistemi non inerziali continua a valere a patto che si consideri il lavoro, o l'energia potenziale, se possibile, delle forze non conservative. Nel nostro caso abbiamo la forza non inerziale che è quella centrifuga, che è conservativa in quanto centrale.
   La sua energia potenziale la posso calcolare esplicitamente calcolado il lavoro della forza centrifuga per spostare una massa m da raggio r_1 a raggio r_2:
   $$-\Delta U = L = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{centrifuga} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \omega^2 r dr = \omega^2 r^2/2 \Big|_{r_1}^{r_2}$$
   da cui $U(r)^{centripeta} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$ (da notare il segno $-$). Di fatto è molto simile a quella potenziale elastica, ma con il segno cambiato, il che è ragionevole, visto che si tratta di una forza che dipende linearmente dalla distanza dal centro (come quella elastica), ma con verso opposto.
   l'energia potenziale totale diventa, tenendo conto che quella centripeta dipende dalla distanza al quadrato dall'asse di rotazione,
   $$U(s) = \frac{mgs}{\sqrt{2}} + \frac{ks^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{l - \sqrt{2}s}{2}\right)^2$$
   che ha come minimi:
   $$s = \frac{2\sqrt{2}m\left(g + \frac{\omega^2 l}{2}\right)}{\frac{m\omega^2}{2} - k}$$
   .
   Se $\omega^2 = \frac{2k}{m}$, non ci sono punti stazionari, se ω è più elevato, ci sono massimi ma per valori di s non fisici, prima dell'asse di rotazione del sistema.

Soluzione dell'esercizio 3.29

1. La forza elastica delle due molle risulta $F_{el} = k(l_0 - x) - k(l_0 - (L - x)) = k(L - 2x)$ Ho usato il fatto che la lunghezza totale delle due molle è costante e pari a L, e che quindi la compressione di una è pari all'estensione dell'altra. Quindi, chiamando x la distanza della massa dal punto in cui l'asta è incernierata, la forza della prima molla è pari a $F_1 = -k(x - l_0)$, e analogamente quella della seconda è pari a $F_2 = -k(l_0 - (L - x))$. Come atteso, per un dato valore di x, le due forze sono opposte (una molla compressa e una estesa). Visto che le due molle sono uguali, le lunghezze a riposo si elidono e la forza totale non dipende da l_0.
   Mi metto in un sistema di riferimento rotante, per cui devo tenere conto anche delle forze non inerziali, ovvero di quella centrifuga $m\omega^2 r$ diretta verso l'esterno.

Se mi fossi messo in un sistema inerziale, dovevo tenere conto che la mia massa fa un moto circolare e quindi la sua accelerazione sarebbe stata pari a $a = \omega^2 r$ diretta verso l'interno. Quindi nel sistema non inerziale: $F_{tot} + F_{centripeta} = F_{tot} - m\omega^2 r = ma = 0$, in quello inerziale $F_{tot} = ma = m\omega^2 r$, e, ovviamente, l'equazione del moto è la stessa.
L'equazione del moto lungo l'asta risulta:

$$m\ddot{s} = F_{el} - mg\cos\theta + m\omega^2 x\sin^2\theta$$

Quindi $x_{eq} = \frac{mg\cos\theta - kL}{m\omega^2\sin^2\theta - 2k}$

2. Calcolo l'energia potenziale totale (elastica e gravitazionale):

$$U = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + \frac{1}{2}k(L-x-l_0)^2 + mgx\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2(x\sin\theta)^2$$

.
Potevo usare direttamente l'en potenziale per calcolare il punto di equilibrio, cercando il minimo. Il vantaggio di usare l'energia potenziale è che posso studiare se il punto di equilibrio è stabile (minimo) o instabile (massimo).
La derivata seconda di $d^2U/dx^2 = 2k - m\omega^2\sin^2\theta$, e quindi si ha un minimo in x_{eq} se $k \geq \frac{1}{2}m\omega^2\sin^2\theta$.

3. Ho ricavato l'eq del moto lungo l'asta, che è di tipo armonico: $\ddot{s} + \left(\frac{2k}{m} + \omega^2\sin^2\theta\right)x - kL + Mg\cos\theta$, quindi $\omega'^2 = \left(\frac{2k}{m} + \omega^2\sin^2\theta\right)$ e $T = \frac{2\pi}{\omega'}$
Quindi il moto e' armonico non solo per le piccole oscillazioni, ma per oscillazioni qualsiasi.

4. Deve essere pari alla somma delle componenti delle forze perpendicolari all'asta, nel nostro caso quella gravitazionale e quella centrifuga. $N = Mg\sin\theta + M\omega^2 x\sin\theta\cos\theta$

Soluzione dell'esercizio 3.30

1. Conservazione energia $mgh + \frac{1}{2}kh^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}m\tan\alpha^2 v_c^2$
$v = \sqrt{\frac{kh^2+2mgh}{M+m\tan\alpha^2}} = 1.11\ m/s$

2. Equazione della dinamica per asta e carrello: R è reazione del piano inclinato sull'asta, N_{asta} la forza che tiene l'asta verticale, e N_{piano} la reazione del piano su cui poggia il carrello:

$$\begin{aligned}
m : m\ddot{y} &= mg + k\delta - R\cos\alpha \\
0 &= -R\sin\alpha + N_{asta} \\
M : M\ddot{x} &= R\sin\alpha \\
0 &= Mg - N_{piano} + R\cos\alpha \\
\ddot{y} &= \tan\alpha\ddot{x}
\end{aligned}$$

Risolvendo: $R = 7.1\ N$, $N_{piano} = 17.9\ N$, $N_{asta} = 3.55\ N$, $\ddot{x} = 2.96\ m/s^2$

Soluzione dell'esercizio 3.31

1. A regime, la velocità limite risulta: $v_l = \sqrt{\frac{2Mg}{C_x \rho A}} = 48\ m/s$, equagliando la forza peso Mg con quella di attrito viscoso $\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x \rho A|v|\vec{v}$.
   Per capire se in 1000m di caduta la velocità limite viene raggiunta, è necessario risolvere l'equazione del moto. Risolvendo $v = v(x)$, dove x è lo spazio percorso in caduta, si ottiene
   $$v^2(x) = v_l^2 \left(1 - e^{\frac{x}{\lambda}}\right)$$
   dove $\lambda = \frac{v_l^2}{2g} = 120\ m$. Quindi la velocità limite si raggiunge in $x \approx 3-4\lambda \sim 400\ m$.
2. L'equazione del moto è la stessa, cambia solo il coefficiente della forza di attrito: $v_l = 4\ m/s$ e viene raggiunta in pochi m.
3. Impulso $F\Delta t = \Delta p = 4000\ kgm/s$. Il tempo Δt è quello di apertura del paracadute: se $\Delta t \approx 5s$, $F_{media} = 800\ N$.

Soluzione dell'esercizio 3.32

1. La soluzione è del tutto simile a quella dell'esercizio 3.31 $v_l = 36\ m/s$;
2. $\tau = \frac{v_l}{g} = 4\ s$, dopo 2.5τ la velocità è circa 80% di quella limite;
3. $T = 4.36 \cdot 10^4\ N$;
4. $N = mg + 4F\sin\theta = 6.4 \cdot 10^5\ N$.

Soluzione dell'esercizio 3.33

1. Nel primo semiperiodo:
   $$x(t) = \left(L - \frac{g\mu}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) + \frac{g\mu}{\omega^2}$$
   , con $\omega^2 = \frac{k}{m}$.
   Nel secondo semiperiodo (dopo che il corpo ha raggiunto l'elongazione massima dalla parte opposta a quella di partenza e inizia a tornare indietro):
   $$x(t) = \left(L - \frac{3g\mu}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) - \frac{g\mu}{\omega^2}$$
   e così via. Il moto è quindi una successione di moti armonici con pulsazione costante ω, centro in $\pm\frac{g\mu}{\omega^2}$, ampiezza che decresce di $\frac{2g\mu}{\omega^2}$ dopo ogni semiperiodo. L'inviluppo di tale moto risulta essere un triangolo.
2. $W_d = \mu mg2A$, dove $A(n)$ è l'ampiezza dell'oscillazione nel semiperiodo n-esimo.
3. Via via che l'energia viene dissipata, l'ampiezza dell'oscillazione si riduce, e con essa la massima forza di richiamo che esercita la molla all'estremità dell'oscillazione. Quando questa forza di richiamo risulta essere minore della forza di attrito statico, il corpo si ferma. La posizione finale del corpo quindi non è al centro del sistema.

Soluzione dell'esercizio 3.34

1. $M\ddot{x} = \frac{Mg}{L}\sin\alpha x$, che ha come soluzione, date le condizioni iniziali:

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)$$

, con $k = \sqrt{g/L\sin\alpha}$.

2. ricavando $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ dalla equazione del moto, si ottiene: $v(t^\star) = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}\left(L^2 - x_0^2\right)}$
Oppure più semplicemente, dalla conservazione dell'energia si ottiene lo stesso risultato:
$\frac{M}{L}x_0 g(-\frac{1}{2}x_0\sin\alpha) = Mg(-\frac{1}{2}L\sin\alpha) + \frac{1}{2}Mv^2$

Soluzione dell'esercizio 3.35

1. $v = \sqrt{2gL\cos\beta} = 3.05\ m/s$
2. $m_1\frac{v_0^2}{L} = -m_1 g\cos\beta + T$, quindi $T = m_1\left(\frac{v_0^2}{L} + g\cos\beta\right) = 17.6\ N$
3. $\omega = \frac{v_0}{L} = 4.73\ rad/s$, $\omega' = \frac{v_0}{L-d} = 11.2\ rad/s$
4. Uso eq. dinamica e conservazione dell'energia:

$$T - mg\cos\phi = m\frac{v_1^2}{L-d}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg(L-d)\cos\beta = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg(L-d)\cos\phi$$

Ricavo $T(\phi)$ dalle equazione di sopra, e richiedo che $T \geq m_2 g$, che fornisce: $\cos\phi \geq \frac{m_2}{3m_1} - \frac{2d\cos\beta}{3(L-d)}$, quindi $\phi \leq 46°$.

Soluzione dell'esercizio 3.36

1. La molla è a riposo, $a_2 = g\sin\theta = 2.0\ m/s^2$
2. La molla è a riposo, $F_{att} = M_1 g\sin\theta = 8.5\ N \leq \mu_s M_1 g\cos\theta = 14.5\ N$
3. uso la conservazione dell'energia: $1/2M_2v_0^2 = 1/2kx^2 \mp M_2 gx\sin\theta$, da cui $x_{M/m} = 0.75, -0.67\ m$, con $\vec{x}$ diretto verso il basso;
4. per esempio scrivo l'energia potenziale totale e trovo il minimo. $U(x) = 1/2kx^2 - M_2 gx\sin\theta$, che ha minimo per $x = \frac{M_2 g\sin\theta}{k} = 34\ cm$. Per il periodo scrivo l'equazione differenziale per la posizione $\ddot{x} + k/M_2 x - g\sin\theta = 0$, e quindi il periodo è $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2.8\ s$. Da notare che non è vero che la pulsazione è sempre $\sqrt{k/m}$ per tutti i moti armonici, ma dipende dalla geometria del caso specifico, quindi è bene scrivere l'equazione differenziale armonica e ricavarsi la pulsazione da quella.
5. se la molla si allunga: $F_{att} = M_1 g\sin\theta + kx^{max} \leq \mu_s M_1 g\cos\theta$, $x^{max} = 60\ cm$ Se si accorcia, cambia il verso della forza elastica, e anche della forza d'attrito statico: $x^{min} = -2.3\ m$
6. La velocità minima necessaria per spostare M_1 si realizza quando M_2 riesce ad allungare/accorciare la molla come al punto precedente, arrivando ferma. Se M_2 scende: $1/2M_2v_m^2 = 1/2kx_{max}^2 + M_2 gx_{max}\sin\theta$, con $x = 0.6$ da cui: $v \geq 1.96\ m/s$. Se invece sale, $(x = 2.3)$ $v \geq 4.31\ m/s$.

Soluzione dell'esercizio 3.37

1. In condizioni statiche, la forza della molla sulla massa M_1 deve essere pari alla forza peso sulla stessa massa, quindi $\Delta x^s = \frac{M_1 g}{k} = 0.39\ m$.
   Sulla massa M_2, la reazione vincolare è pari alla somma vettoriale della forza peso e della forza elastica, che hanno verso concorde. $N_2 = (M_2 g + k\Delta x) = (M_1 + M_2)g = 58.8\ N$.
2. $M_1 a_1 = F - M_1 g + k\Delta x = F$, quindi $a_1 = \frac{F}{M_1} = 7.5\ m/s^2$
3. Uso conservazione dell'energia, usando come quota di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale la quota del corpo M_1 nell'istante iniziale:
   $$\begin{aligned} E^{tot}_{ini} =& 0 + 1/2k\Delta x^2 + 0 \\ E^{tot}_{fin} =& 1/2M_1 v_1^2 + 0 + M_1 g\Delta x \\ E^{tot}_{fin} =& E^{tot}_{ini} + \mathcal{L}_F = E^{tot}_{ini} + F\Delta x \end{aligned}$$
   da cui ricavo: $v_1 = 1.43\ m/s$
4. uso sempre la conservazione dell'energia, tra la posizione in cui la molla è a riposo e il punto di massimo allungamento, e usando come quota di riferimento quella in cui la molla è a riposo:
   $$\begin{aligned} E^{tot}_{ini} =& 1/2M_1 v_1^2 + 0 + 0 \\ E^{tot}_{fin} =& 0 + 1/2k\Delta x^2_{max} + M_1 g\Delta x_{max} \\ E^{tot}_{fin} =& E^{tot}_{ini} + \mathcal{L}_F = E^{tot}_{ini} + F\Delta x_{max} \end{aligned}$$
   da cui ricavo $\Delta x_{max} = 0.21\ m$. L'altra soluzione è negativa e non fisica.
   Visto che il moto è di tipo armonico (abbiamo una molla e forze costanti), l'accelerazione nel punto di massima estensione è pari, a meno del segno, a quella del punto di massima compressione della molla, che è l'accelerazione calcolata al punto 2. Quindi $a(\Delta x_{max}) = -a_1 = -7.5\ m/s^2$
5. Quando la molla ha la massima estensione, la forza elastica sulla massa M_2 è massima. Quindi basta verificare che in quella condizione M_2 rimane appoggiata al piano. La reazione vincolare risulta: $N_2 = M_2 g - k\Delta x_{max}$. La condizione perchè M_2 non si sollevi è quindi: $M_2 \geq \frac{k\Delta x_{max}}{g} = 1.06\ kg$ oppure $\Delta x_{max} \leq \frac{M_2 g}{k} = 0.78\ m$, ed è verificata.

Soluzione dell'esercizio 3.38

1. Forza elastica mi dá l'accelerazione centripeta: $-k(r_0 - l_0) = -m\omega_0^2 r_0$, da cui: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k(r_0 - l_0)}{m r_0}} = 1.73\ rad/s$
2. Conservazione dell'energia:
   $E^{ini}_{tot} = \frac{1}{2}m(\omega_0 r_1)^2 + \frac{1}{2}k(r_0 - l_0)^2 = 389\ J$
   $E^{fin}_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k(r_2 - l_0)^2 = E^{ini}_{tot}$, da cui $v_2 = 4.52\ m/s$. Attenzione che non conosco la direzione di $\vec{v_2}$, quello che ho trovato è il modulo e non so se sia tangente, radiale o entrambe.

3. Conservazione momento angolare rispetto a O. $L_O = mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$, quindi $\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1 = 1.78\ rad/s$. Volendo ricavo $v_2^T = \omega_2 r_2 = 3.56\ m/s$, e quindi capisco che ho anche una componente radiale $v_2^R = 2.78\ m/s$

3.3 Dinamica del punto materiale: sistemi non inerziali

Esercizio 3.39

Una piattaforma di massa $M_p = 100\ kg$ si muove su e giú di moto armonico con frequenza $\nu = 5\ Hz$, e ampiezza $A_0 = 5\ cm$. All'istante $t = 0\ s$ si trova nel punto più basso. Sulla piattaforma è appoggiato un corpo di massa $m = 1\ kg$.

Determinare:

1. la posizione della piattaforma quando il corpo appoggiato sopra si stacca;
2. la velocità del corpo m all'istante del distacco;
3. l'altezza massima che raggiunge il corpo dopo il distacco;
4. il lavoro totale $\mathcal{L}$ fatto dalle forze che agiscono sulla piattaforma tra l'istante $t = 0\ s$ e quello del distacco di m
5. il lavoro della forza che fa oscillare la piattaforma tra gli stessi istanti.

Esercizio 3.40

Un punto materiale di massa m è posto su una piano orizzontale scabro con $\mu_S = 0.3$. Il piano ruota attorno ad un asse ad una distanza $R = 20\ cm$ dal punto, con una accelerazione angolare $\alpha = 1\ rad/s^2$, partendo da fermo.

Si chiede:

1. l'istante t_1 quando il punto materiale inizia a muoversi rispetto al piano, se fosse vincolato a muoversi solo lungo un raggio;
2. idem (t_2), se vincolato lungo una circonferenza di raggio R;
3. idem (t_3), se fosse non vincolato;
4. descrivere qualitativamente il tipo di moto cui è sottoposto dopo tale istante, nell'ultimo caso.

Esercizio 3.41

Una piattaforma di raggio $R = 5\ m$ ruota con $\omega = 3\ giri/minuto$ attorno al suo asse. Un punto materiale parte da fermo dal centro con accelerazione a' costante (rispetto alla piattaforma) e arriva sul bordo in $t = 3\ s$

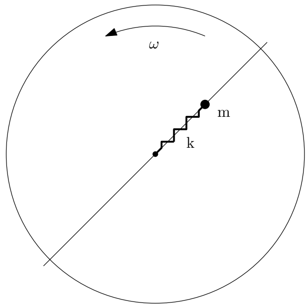
Calcolare, nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio:

1. $\vec{v}_f$;
2. $\vec{a}_1(t_1 = 1.5\ s)$

Esercizio 3.42 *(M.S.V 3.11)*

Un disco di raggio R ruota senza attrito su un piano orizzontale con velocità angolare ω attorno al suo asse. Un corpo di massa m è collegato al centro del disco da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $l_0 = 0$, vincolato a muoversi lungo un diametro da una guida. Si osserva che quando il corpo dista $R/2$ dal centro del disco, esso ha velocità radiale nulla.

Calcolare, nell'ipotesi che il corpo rimanga dentro il raggio del disco:



1. l'equazione del moto;
2. la reazione $\vec{N}$ del vincolo quando il corpo si trova al centro del disco;
3. la velocità $\vec{v}$ di uscita dal disco se l'ipotesi iniziale non è soddisfatta.

Esercizio 3.43

Un uomo di massa $M = 70\ kg$ si trova dentro un treno che accelera con accelerazione costante da $v_i = 10\ km/h$ a $v_f = 200\ km/h$ in $\Delta t = 5\ min$

Calcolare:

1. la forza $\vec{F}_1$ che subisce all'istante $t_1 = 1.0\ min$
2. la forza $\vec{F}'_1$ che sente nel sistema di riferimento solidale al treno.

All'istante $t_2 = 3\ min$ il treno percorre con velocità costante $v_f = 200\ km/h$ una curva con raggio di curvatura $r = 200\ m$ e l'uomo lascia cadere un oggetto di massa $m = 4.0\ g$

3. la forza $\vec{F}_2$ nel sistema di riferimento inerziale;
4. la forza $\vec{F}'_2$ nel sistema di riferimento solidale al treno;
5. la forza $\vec{F}_o$ sull'oggetto lasciato cadere nel riferimento inerziale.

Soluzione dell'esercizio 3.39

1. Il moto della piattaforma è $x(t) = -A_0 \cos(2\pi\nu t)$.
Le forze su m sono: $-mg + N - ma_p = ma$ dove a_p è l'accelerazione della piattaforma rispetto ad un sistema inerziale (laboratorio) e a è quella del corpo m rispetto alla piattaforma.
Il distacco avviene quando $N = 0$, quindi quando $a_p = \ddot{x}(t) = -g$. Si ottiene $x(t) = +1\ cm$.
2. $v(t) = \dot{x}(t) = 1.54\ s$; La posso calcolare con l'eq del moto o, meglio, con la legge delle forze vive $U_k = 1/2mv^2 = \mathcal{L}_{Ris} = \int_{-A_0}^{x_{distacco}} F_{ris} ds = \int mads = \int -m\omega^2 x dx = m\omega^2/2(A_0^2 - x_d^2)$
3. conservazione energia $U_k = mg\Delta h$, $\Delta h = 1.2\ m$
4. $\mathcal{L} = \int_{-A_0}^{x(t)} \vec{F_{tot}} d\vec{s} = (M_p + m) \int_{-A_0}^{x(t)} a_p ds = -(M_p + m)(2\pi\nu)^2 \int_{-A_0}^{x(t)} x dx = 120\ J$.
Oppure, $\mathcal{L} = \Delta E_K = \frac{1}{2}(M_p + m)v^2(t) = 120\ J$.

Soluzione dell'esercizio 3.40

1. Nel RF' non inerziale, ho forza centrifuga $F_c = ma_c = m\omega^2 R = mR\alpha^2 t^2$.
Visto che il moto è circolare accelerato, ho anche una accelerazione tangenziale di RF' rispetto al laboratorio, quindi una seconda forza non inerziale: $F_T = ma_T = mR\alpha$.
La forza inerziale totale è quindi $\vec{F} = mR\alpha^2 t^2 \hat{u}_r + mR\alpha\hat{u}_T$. Quando il $|F| \geq \mu_s mg$, il corpo comincia a muoversi.
In questo caso conta solo la forza inerziale radiale, quindi $mR\alpha^2 t^2 \geq \mu_S mg$, $t \geq \sqrt{\frac{\mu_S g}{\alpha^2 R}} = 3.8\ s$
2. conta solo la componente tangenziale: $mR\alpha \geq \mu_S mg$, che non è mai vera, quindi il corpo in questo caso sta fermo;
3. devo considerare entrambe le componenti: $|F| = R\alpha\sqrt{(\alpha t^2)^2 + 1} \geq \mu_S mg$, il che avviene per $t \geq \sqrt{\frac{1}{\alpha}\sqrt{\left(\frac{\mu_S g}{R\alpha}\right)^2 - 1}} = 3.8\ s$.
Da notare che per $(\alpha t^2)^2 >> 1$, cioé non appena t é maggiore di $t = 1\ s$, la componente radiale della forza inerziale domina rispetto a quella tangenziale, quindi non è una sorpresa che $t_1 = t_3$.

Soluzione dell'esercizio 3.41

1. Nel RF' non inerziale solidale con la piattaforma: $r(t) = 1/2a't^2$, quindi $a' = 1.11\ m/s^2$. $\omega = 3 \cdot 2\pi/60 = 0.31\ rad/s$. $\vec{v}'_f = \vec{a}'t = 3.33\hat{u}_r\ m/s$.
Nel RF del laboratorio: $\vec{v}_f = \vec{v'}_f + \vec{\omega} \times \vec{r} = 3.33\hat{u}_r + 1.5\hat{u}_T\ m/s$
2. Per $r_1(t_1) = 1/2a't_1^2$, $v'_1 = a't_1$.
$\vec{a} = \vec{a_0} + \vec{a'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r_1} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_1}) + 2(\vec{\omega} \times \vec{v'_1})$ nel nostro caso:
$\vec{a} = (a' - \omega^2 r_1)\hat{u}_r + 2\omega v'_1 \hat{u}_T = 0.99\hat{u}_r + 1.04\hat{u}_T\ m/s^2$

Soluzione dell'esercizio 3.42

1. Nel RF' non inerziale solidale con il disco: $F_r = ma'_r = +m\omega^2 r - kr$, quindi l'equazione del moto è in generale:

$$\ddot{r} - r\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right) = 0$$

La soluzione è limitata, e quindi il corpo rimane dentro il disco, se $\omega^2 - \frac{k}{m} \geq 0$, ossia se la forza risulante è diretta verso l'interno. In tal caso, l'equazione del moto risulta quella di un oscillatore armonico, con pulsazione $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$. Date le condizioni iniziali, e scegliendo $t = 0$ quando $r = R/2$ e $v = 0$, si ottine:

$$r(t) = R/2 \cos \Omega t$$

2. Le forze non inerziali sono la forza centrifuga (nulla perché siamo a $r = 0$) e la forza di Coriolìs, che vale $F_{co} = 2\omega v(r = 0) = \omega\Omega R/2$ e questa è anche, in modulo, la reazione del vincolo.
3. Se il moto non è vincolalo, l'equazione della dinamica diventa $\ddot{r} + r\Omega' = 0$, con $\Omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}$.
La soluzione, considerando le condizioni al contorno, è $r(t) = \frac{r}{4}\left(e^{\Omega' t} + e^{-\Omega' t}\right)$.
L'istante in cui il corpo raggiunge $r = R$, risulta $t = \frac{\ln 2+\sqrt{3}}{\Omega'}$, per cui la velocità radiale di uscita risulta: $v_r(r = R) = \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega' R$, cui va aggiunta la velocità tangenziale pari a $v_t(r = R) = \omega R$.
E' molto più semplice risolvere questo punto, come quello precedente, usando la conservazione dell'energia. La forza centrifuga è conservativa, dato che è una forza centrale. Quella di Coriolis non compie lavoro perchè è sempre ortogonale alla velocità e quindi al moto.
L'energia potenziale centrifuga è $U(r) = -m\omega^2 r^2/2$ e si ricava facilmente calcolando in modo esplicito il lavoro della forza centrifuga $\mathcal{L} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\omega^2(r_2^2 - r_1^2)/2 = -\Delta U(r)$.
La conservazione dell'energia fornisce $U_k(v = 0) + U_{el}(R/2) + U_{cf}(R/2) = U_k(v = v) + U_{el}(R) + U_{cf}(R)$, da cui si ricava $v = \frac{\sqrt{3}}{2}R\Omega'$, cui va sempre aggiuntam vettorialmente, la velocità tangenziale $v = \omega R$.

Soluzione dell'esercizio 3.43

1. Mi metto in un sistema di riferimento inerziale solidale alla stazione. Le forze presenti sono: forza peso, reazione vincolare del pavimento, reazione vincolare orizzontale (attrito statico o schienale della poltrona):
$\vec{F_1} = -Mg\hat{z} + M\hat{z} + R\hat{x} = Ma\hat{x}$, $a = (v_f - v_i)/\Delta t = 0.18\, m/s^2$, $R = Ma = 12.6\, N$.
La forza R orizzontale, esercitata dal treno sul passeggero, è quella che fa accelerare il passeggero con la stessa accelerazione del treno.
2. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al treno, le forze lungo $\hat{z}$ sono le stesse del punto precedente, mentre lungo il moto del treno $\hat{x}$, si ha una forza non-inerziale pari a $F_{NI}\hat{x} = -Ma\hat{x} = -12.6\hat{x}\ N$. La risultate di tutte le forze nel SdR del treno è $\vec{F}'_1 = -Mg\hat{z} + M\hat{z} + R\hat{x} + F_{NI}\hat{x} = 0$, infatti il passeggero è fermo rispetto al treno.

3. Oltre alle forze del punto 1, c'è anche una forza centripeta $\vec{F_c} = Mv^2/r\hat{u}_\perp = M(a \cdot t_2 + v_i)^2/r\hat{u}_\perp = 433\hat{u}_\perp\ N$, perpendicolare al moto del treno, e diretta verso l'intero della curva, che è sempre fornita dall'interazione del treno con il passeggero (attrito statico con pavimento o reazione della poltrona)
4. Vi è una forza non inerziale radiale: $F_{NI}\hat{u}_\perp = -\vec{F_c}$. Di nuovo il passeggero non accelera rispetto al treno, quindi la risultante delle forze è nulla.
5. Nel sistema di riferimento inerziale, l'oggetto è sottoposto alla sola forza di gravità: $\vec{F_o} = -mg\hat{z}$
   Nel sistema di riferimento non inerziale, si hanno anche forze non ineziali: $\vec{F}_o^{NI} = -m(a + a_c) = (+7.2 \cdot 10^{-4}\hat{u}_\parallel + 2.4 \cdot 10^{-4}\hat{u}_\perp)\ N$
   Durante la caduta, quando la velocità di caduta è v, l'accelerazione ha anche una componente di Coriolis $2\omega \times v$, dove ω è la velocità angolare del treno che curva $\omega = v_{treno}/r = (a \cdot t + v_0)/r$, mentre v è la velocità di caduta dell'oggetto $v = g(t - t_2)$.
   Tuttavia, la velocià angolare è diretta verticalmente, così come la velocità, quindi l'accelerazione di Coriolis è nulla.

4 Gravitazione

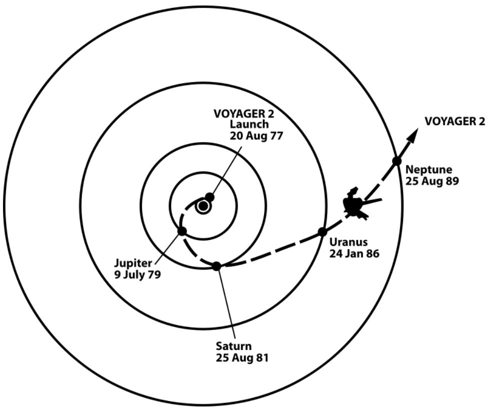
Esercizio 4.1

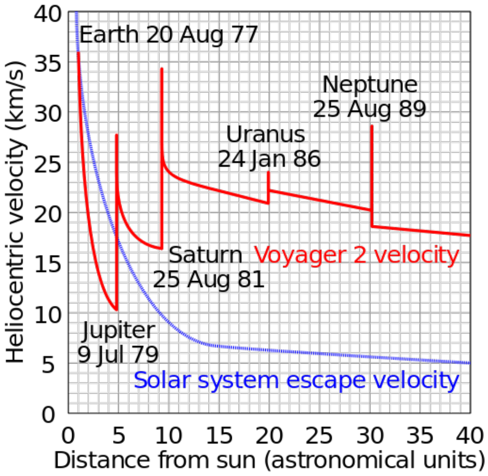
La sonda VoyagerII di massa m, e velocità relavita al sole $v = 12\ km/s$ ha usato Giove (massa $M \gg m$ e velocità rispetto al sole $V = 13\ km/s$) come fionda per aumentare la sua velocità.

Si supponga che VoyagerII sia arrivato con direzione opposta al moto di Giove, e, dopo l'interazione, si allontani in direzione concorde.

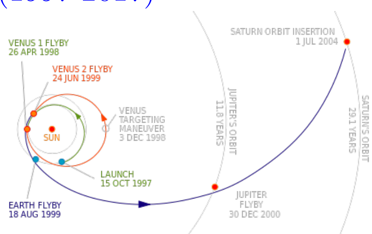
1. calcolare la nuova velocità della sonda.

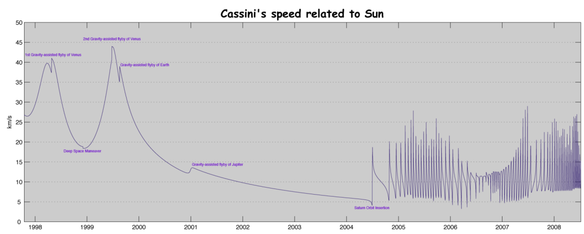
Esempio di effetto "Fionda gravitazionale" per Voyager (I/II) (1977-today). Traiettoria e velocità rispetto al sole



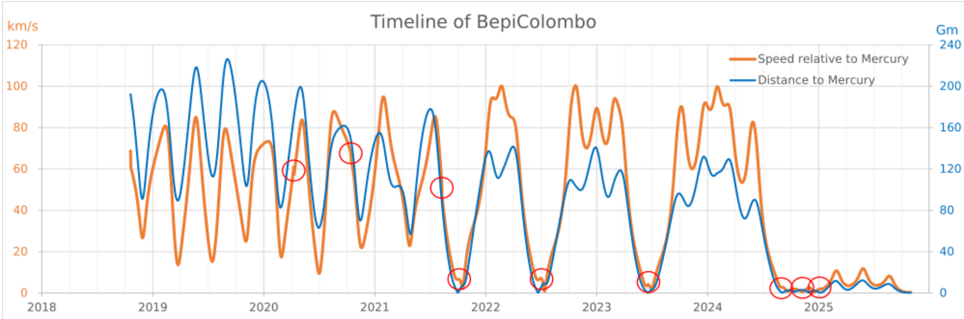


Missione Cassini-Huygens (1997-2017)





Missione BepiColombo (2018-2028)



BepiColombo on Wikipedia
BepiColombo Trajectory animation

Esercizio 4.2

Un satellite artificiale è lanciato in modo che ad un certo istante la sua distanza dal centro della terra sia $= 7.4 \cdot 10^6\ m$ e la velocità v sia perpendicolare ad R.

Calcolare:

1. la massima v per avere orbita chiusa;
2. se $v = 0.9 v_{max}$, i semiassi della sua orbita
3. il periodo dell'orbita.

Esercizio 4.3

Una astronave si trova su un'orbita circolare a $h = 300\ km$ dal suolo terrestre $R_T = 6.370 \cdot 10^6 m$. Accende i motore per un breve istante e aumenta la sua velocità di $\Delta v = 500\ m/s$, nella direzione del moto.

Calcolare:

1. $v_{orbitale}$ e periodo T iniziale;
2. la distanza massima dal centro della terra dopo l'impulso (apogeo);
3. idem se l'impulso fosse radiale
4. la velocità all'apogeo;
5. il ΔV per tornare ad un'orbita circolare all'apogeo
6. il periodo T' (ellittica e circolare)
7. il massimo Δv per continuare ad avere un'orbita chiusa.

Esercizio 4.4

Voglio portare in orbita bassa (LEO) ($h = 200\ km$) un satellite di massa $m = 1000\ kg$, usando un Falcon-9R come vettore ($v_{gas} = 3\ km/s$, $M_{tot} = 480\ ton$).

L'accensione del razzo dura $\Delta t = 150\ s$ e l'attrito con l'atmosfera causa un $\Delta V_{atmosferico} = 200\ m/s$. Il decollo avviene da Cape Canaveral ($\lambda = 28.5°$), $R_{terra} = 6370\ km$. Calcolare:

1. la velocità orbitale che devo raggiungere
2. la variazione di energia potenziale gravitazionale del satellite;
3. la variazione di energia cinetica del satellite.
4. la massa finale del razzo nell'ipotesi se sale un solo stadio per tutto il viaggio;

5. se sale con due stadi, il primo che porta a `MACH` 6, e il secondo di massa $M_{II} = 80\ ton$ con lo stesso v_{gas};

Esercizio 4.5

Un punto materiale viene lanciato radialmente dalla superficie di un pianeta di massa m_2 e raggio r_2, con velocità iniziale v_0. Si osserva che si arresta quando $r = 2r_2$.

Un diverso punto materiale è si trova in orbita circolare con raggio $r_1 = 4.6\ r_2$, attorno ad un secondo pianeta con massa m_1.

1. supponendo che la velocità del secondo punto materiale sia proprio v_0, si ricavi il rapporto tra le masse m_1/m_2

Soluzione dell'esercizio 4.1

1. E' un urto: conservo momento lineare e energia.

$$mv + MV = mv' + MV'$$
$$\frac{1}{2}(mv^2 + MV^2) = \frac{1}{2}(mv'^2 + MV'^2)$$

da cui ricavo: $v' = \frac{2MV}{M+m} + v\frac{m-M}{m+M} = 2V - v = -38\ km/s$ (facendo l'ipotesi che $M \gg m$)

Soluzione dell'esercizio 4.2

1. Impongo $E_{tot} < 0$ per avere orbita chiusa, e ottengo $v \leq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2R_T^2 g}{R}} = 1.038 \cdot 10^4\ m/s$
2. $E_{tot} = -\frac{GMm}{2a}$ da cui $a = 1.94 \cdot 10^7\ m$.
   Da $L^2 = Gm^2M\frac{b^2}{a}$, $b = 1.53 \cdot 10^7\ m$
3. da terza legge di Keplero: $T = \sqrt{\frac{2\pi^2 a^3}{GM}} = 15130\ s = 4.2\ h$.

Soluzione dell'esercizio 4.3

1. $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_T+h}} = 7.75\ km/s$; $T = 5410\ s$.
2. $r_{apogeo} = 8.72 \cdot 10^6\ m$, $\Delta r = 2000\ km$
3. $\Delta r'_{apogeo} = 360\ km$
4. $v_{apogeo} = 6.31\ km/s$
5. $v_{orbitale\ apogeo} = 6.6\ km/s$
6. da terza legge di Keplero: $T = \sqrt{\frac{2\pi^2 a^3}{GM}} = 6705\ s = 1.86\ h$. Per orbita circolare $2.3h$
7. Impongo $E_{tot} \leq 0$, $\Delta v \leq v(\sqrt{2} - 1) = 3.2\ km/s$.

Soluzione dell'esercizio 4.4

1. $v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = 7.778\ km/s = \texttt{MACH}\ 22.7$
2. $\Delta U_g = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = 1.902\ GJ$.
   Se l'avessi calcolato con ipotesi di gravità costante: $\Delta U = mgh = 1.96\ GJ$ Errore 2%.
   A $h = 200$ $mg(h) = \frac{GMm}{(R_T+h)^2} = \frac{GM}{R_T}\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = g\left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = g(1 - 6\%)$, quindi quasi uguale a quella sulla terra!
3. $\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 - \frac{1}{2}mv_t^2 = 30\ GJ$, $\Delta E_k \sim 15\Delta U_g$

4. $\Delta V_{tot} = \Delta V + \Delta V_{gravitazionale} + \Delta V_{atm}$
   $\Delta V = v_{orb} - v_{ini} = v_{orb} - \omega_{terra} R_T \cos\lambda = 7780 - 407\ km/s$
   $\Delta V_{grav} = g\Delta t = 1470\ km/s$, quindi $\Delta V_{tot} = 9.0\ km/s$
   $M_F = M_I e^{-\frac{\Delta V}{v_{gas}}} = 24\ ton$
5. Se due stadi:
   $\Delta V_I = (2000 - 407) + 700 + 200$, ipotizzando che salga fino a $h/2$ e quindi sia il solo a muoversi in atmosfera. $M_F = 208\ ton$, compresa la massa del secondo stadio, quindi $128 + 80\ ton$.
   $\Delta V_{II} = (7780 - 2000) + 700$, quindi $M_F^{II} = 9.2\ ton$

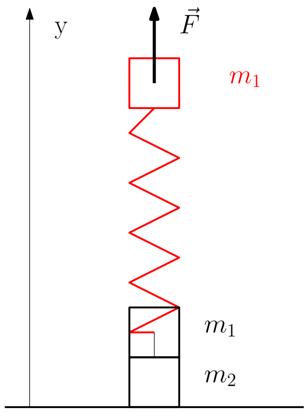
Soluzione dell'esercizio 4.5

5 Dinamica dei sistemi

Esercizio 5.1

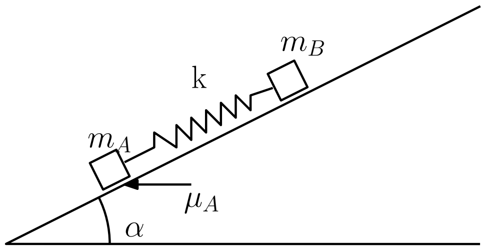
Due masse M_1 e M_2 sono collegate da una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.
Inizialmente M_2 è appoggiata al pavimento, mentre M_1 si trova appoggiata sopra di essa, entrambe a riposo (disegno in nero). La massa M_1 viene tirata verso l'alto da una forza costante $\vec{F}$ (in rosso) .
Determinare:

1. la minima $\vec{F}$ perchè M_2 si sollevi dal pavimento;
2. l'equazione del moto di $M_{1,2}$ dopo tale istante.



Esercizio 5.2

Due corpi di massa $m_A = 1\ kg$ e $m_B = 2\ kg$ si trovano su un piano inclinato $\alpha = 30°$, e sono collegati da una molla $k = 60\ N/m$ e $l_0 = 0.2\ m$. Il corpo m_A ha un coefficiente di attrito dinamico $\mu_A = 0.6$, mentre B scivola senza attrito. Inizialmente i due corpi sono fermi ad una distanza $d_0 = 0.3\ m$.
Calcolare:



1. il periodo T delle oscillazioni di B rispetto ad A.
2. v_B quando la distanza tra le due masse è $d_1 = 0.1\ m$, sapendo che A si è nel frattempo spostato di $\Delta x_A = 24\ cm$ e $v_A = 2.3\ m/s$;
3. per quale distanza iniziale d_0' i due corpi mantengono la stessa distanza lungo la discesa;

Esercizio 5.3

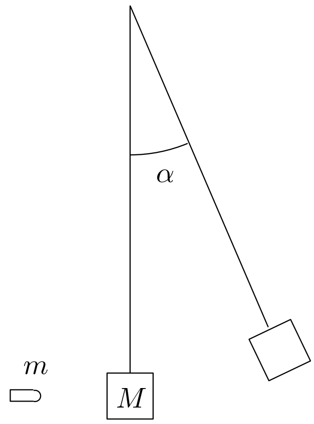
Due masse $m_1 = 2\ kg$ e $m_2 = 3\ kg$ sono collegate da una molla e da un filo che comprime la molla di $\Delta l = 0.1\ m$ rispetto alla sua lunghezza di equilibrio e si trovano su un piano orizzontale privo di attrito, inizialmente ferme. All'istante $t = 0\ s$, il filo viene tagliato e si osserva che $v_1 = 0.5\ m/s$ quando la molla è a riposo.
Calcolare:

1. k della molla;
2. equazione del moto.

Esercizio 5.4 *pendolo balistico*

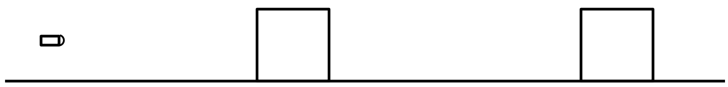
Un proiettile di massa $m = 10\ g$ viene sparato su una massa $M = 10\ kg$, appesa al soffitto da una fune ideale di lunghezza l. Il proiettile rimane conficcato dentro la massa dopo l'urto e la massa si solleva fino ad un angolo α
Determinare:

1. la relazione tra v_m e α;
2. il bilancio energetico durante l'urto.



Esercizio 5.5

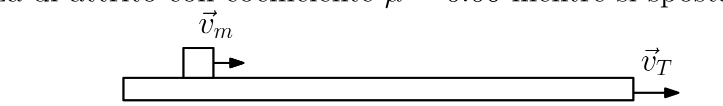
Un proiettile $m = 10\ g$ viene sparato orizzontalmente con velocità $v = 200\ m/s$ contro due blocchi di massa $M_1 = M_2 = 1\ kg$, appoggiati ad un piano scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.6$. I due blocchi distano inizialmente $d = 10\ cm$, e dopo l'urto restano incollati.



1. v_1 dopo l'urto;
2. v_1' quando colpisce M_2;
3. v_2 dopo secondo urto;
4. x percorso successivamente da M_2.

Esercizio 5.6

Una tavola $M = 4\ kg$ scivola senza attrito su un piano orizzontale, inizialmente con $v_T = 0.20\ m/s$. Sopra la tavola viene lanciato un secondo corpo di massa $m = 1.0\ kg$, con una velocità, rispetto alla tavola $v_{m,T} = 0.80\ m/s$. Questo secondo corpo subisce una forza di attrito con coefficiente $\mu = 0.06$ mentre si sposta sopra la tavola. Si chiede:



1. v_T' della tavola quando m è fermo rispetto ad essa;
2. l'accelerazione della tavola $\vec{a}_T$ e quella del corpo $\vec{a}_m$ durante il moto;
3. il tempo Δt perché il corpo si fermi rispetto alla tavola;
4. lo spazio Δs percorso dalla tavola in questo tempo;
5. lo spazio Δx percorso dal corpo sulla tavola.

Esercizio 5.7

Un corpo di massa $m = 2\ g$ viene lanciato con $v = 1\ m/s$ su un piano orizzontale liscio verso una rampa come in figura, di massa $M = 198\ g$ inizialmente ferma.

Calcolare

1. la velocità V della rampa quando m è fermo rispetto ad essa;
2. l'altezza massima h del corpo m;
3. la velocità v'_M della rampa quando il corpo m è sceso da essa.
4. l'energia dissipata se il corpo m urtasse in modo completamente anaelastico un ostacolo di massa M, restando incastrato.

Esercizio 5.8

Due masse $m = 400\ g$ sono unite da un'asta di lunghezza $l_0 = 30\ cm$ che ruota attorno al suo centro con $\omega_0 = 50\ giri/min$. La distanza tra le masse viene ridotta a $l_1 = 20\ cm$.

Determinare:

1. la nuova velocità angolare ω_1;
2. il lavoro necessario per ridurre la distanza tra le masse;
3. nell'ipotesi che la forza usata per avvicinare le masse sia costante, calcolare tale forza.

Esercizio 5.9

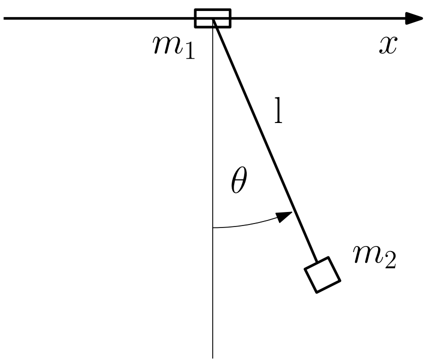
Un uomo di $m = 80\ kg$ salta a terra da un carrello di $M_A = 200\ kg$, con una velocità orizzontale relativa al carrello pari a $v' = 5\ m/s$. Il carrello è collegato, tramite una molla ideale, ad un secondo carrello di massa $M_B = 300\ kg$, entrambi liberi di muoversi su un piano orizzontare senza attrito, e inzialmente a riposo.

Determinare:

1. la velocità nel laboratorio dell'uomo v, e dei due carrelli V_A e V_B appena dopo il salto;
2. il lavoro W compiuto dall'uomo per saltare;
3. la k della molla se la sua compressione massima è $\Delta x = 10\ cm$;
4. descrivere il moto del sistema dopo il salto.

Esercizio 5.10

Ad una massa m_1, libera di muoversi senza attriti su un asse orizzontale, è appeso un pendolo di massa m_2 e lunghezza l, libero di oscillare senza attriti. Il sistema, inizialmente fermo, viene fatto oscillare muovendo il pendolo dalla posizione di equilibrio.



Calcolare:

1. la posizione di equilibrio;
2. il periodo delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.

Esercizio 5.11

Su un nastro trasportatore, che si muove con velocità costante $v = 0.96\ m/s$, viene fatta cadere verticalmente del materiale ad un ritmo di $dm/dt = 0.134\ kg/s$.

Determinare:

1. la forza esterna necessaria per mantenere costante la velocità del nastro;
2. cosa succede se il nastro ha lunghezza finita e alla fine scarica il materiale?
3. la velocità del nastro $v(t)$ nel caso non vi siano forze esterne, se il nastro ha lunghezza $l = 10\ m$ e massa a vuoto $m_0 = 1\ kg$.

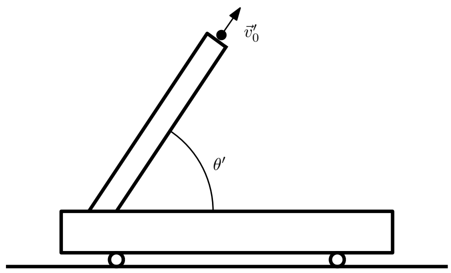
Esercizio 5.12 *(Cannone di galileo)*

Due palle (massa M e m, con $M \gg m$) perfettamente elastiche vengono fatte cadere insieme a terra da una altezza h, la più piccola appoggiata sopra quella più grande, dove rimbalzano.

1. si calcoli l'altezza raggiunta dalla pallina di massa m confrontandola con quella che raggiunge se viene fatta rimbalzare per terra da sola.
2. che succede se i palloni sono n, tali che $M_{n+1} \gg M_n$?

Esercizio 5.13

Un cannone è posto su una piattaforma libera di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Il cannone è inclinato di un angolo $\theta' = 60°$, la massa della piattaforma e del cannone è $M = 1480\ kg$. Un proiettile di massa $m = 20\ kg$ viene sparato dal cannone, con una velocità iniziale pari a $v'_0 = 300\ m/s$.



1. la velocità del carrello rispetto a terra dopo lo sparo V;
2. la velocità del proiettile riespetto a terra del proiettile v;
3. l'angolo θ di uscita del proiettile rispetto a terra.

Soluzione dell'esercizio 5.1

1. equazioni dinamica per i due corpi:

$$M_1\ddot{y}_1 = +F - M_1 g - k(y_1 - y_2)$$
$$M_2\ddot{y}_2 = +N_2 - M_2 g + k(y_1 - y_2)$$

   Nelle condizioni iniziali: $y_2 = 0$, e $N_2 = 0$, $\ddot{y}_2 \geq 0$ per far alzare il corpo M_2.
   Dalla seconda equazione si ricava che $y_1 \geq \frac{M_2 g}{k}$ per far alzare il corpo.
   Dalla prima, la soluzione generale, date le condizioni iniziali risulta $y_1(t) = \frac{F-M_1 g}{k}(1 - \cos\omega t)$, con $\omega^2 = \frac{k}{M_1}$. y_1 massimo vale $y_1^{max} = 2\frac{F-M_1 g}{k} \geq \frac{M_2 g}{k}$, quindi $F \geq M_1 g + \frac{M_2 g}{2}$
   Si può risolvere anche con la conservazione dell'energia. All'estremo superiore del moto di M_1 (dove è fermo) $\Delta U = \frac{1}{2}ky_2^2 + M_1 g y_1 - 0 = Fy_1$, da cui si ricava lo stesso risutato di prima.

2. le equazioni del moto risultano:

$$\ddot{y_{CM}} = \frac{F}{M_1 + M_2} - g$$
$$\mu\ddot{\Delta y} + k\Delta y - \frac{M_2 F}{M_1 + M_2} = 0$$

   con $y_{CM} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2}$, $\Delta y = y_1 - y_2$, $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$. Le soluzioni in queste coordinate sono semplici.

$$y_{CM}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{M_1 + M_2} - g\right)t^2$$
$$\Delta y(t) = A_0\cos(\omega t + \phi) + \frac{M_2 F}{(M_1 + M_2)k}$$

   da cui si può ricavare l'equazione per $y_{1,2}(t)$.

Soluzione dell'esercizio 5.2

1. $\omega^2 = \frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.66\ s$.
2. conservo l'energia: $\Delta E_{tot} = \Delta(E_k + U_g + U_{el}) = -\mathcal{L}$.

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\left(m_A v_A^2 + m_B v_B^2\right)$$
$$\Delta U_{el} = \frac{k}{2}\left(d_f^2 - d_i^2\right)$$
$$\Delta U_g = -(m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B) g \sin\alpha$$
$$\mathcal{L} = -\mu_A m_A g \cos\alpha \Delta x_A$$

   Che fornisce $v_B = 2.0\ m/s$

3. dalle equazioni della dinamica:

$$m_A m_B \ddot{\Delta x} + k(m_A + m_B)(\Delta x) = -m_a m_B g \mu_A \cos\alpha + k(m_A + m_B) l_0$$

, l'accelerazione risulta nulla se la distanza tra le due masse risulta:

$$\Delta x = \frac{-m_a m_B g \mu_A \cos\alpha + k(m_A + m_B) l_0}{k(m_A + m_B)} = l_0 - \frac{m_a m_B g \mu_A \cos\alpha}{k(m_A + m_B)} = 14.3\ cm$$

Soluzione dell'esercizio 5.3

1. il sistema è conservativo, si conserva l'energia totale e il momento della quantità di moto. $m_1 v_1 = m_2 v_2$, $\frac{1}{2} k l^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$, da cui ricavo: $k = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)\frac{v_1^2}{l^2} = 83.3\ N/m$;
2. $x_{cm}(t) =$ costante, $(x_1 - x_2)$ si muove con moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$

Soluzione dell'esercizio 5.4

1. durante l'urto si conserva la quantità di moto, dopo si conserva l'energia.
   $m v_m = (M + m) v_M$, $\frac{1}{2} M v_M^2 = M g l (1 - \cos\alpha)$ quindi $v_m = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}\frac{M}{m}$
2. $E_{ini} = \frac{1}{2} m v_m^2$, $E_{fin} = \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v_m^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M} v_m^2 < E_{ini}$
   La differenza si dissipa durante l'urto anaelastico.

Soluzione dell'esercizio 5.5

1. $mv = (m + M) v_1$, $v_1 = 1.98\ m/s$;
2. $\Delta E_k = \mathcal{L}_{attrito}$, $\frac{1}{2}(m + M) v_1^2 = \frac{1}{2}(m + M) v_1'^2 - \mu(M + m) g d$, $v_1' = 1.66\ m/s$;
3. $(m + M) v_1' = (m + M + M) v_2$, quindi $v_2 = 0.83\ m/s$;
4. $\frac{1}{2}(m + 2M) v_2^2 = (M + M + m) g \mu x$, $x = \frac{v_2^2}{2g\mu} = 5.85\ cm$.

Soluzione dell'esercizio 5.6

1. la forza d'attrito è interna al sistema, quindi il momento della quantità di moto si conserva.
   $M v_T + m(v_T + v_a) = (M + m) v_T'$, $v_T' = 0.36\ m/s$;
2. $m \vec{a}_m = -\mu g m \hat{x}$, quindi $\vec{a}_m = -\mu g \hat{x} = -0.59 \hat{x}\ m/s^2$
   $M \vec{a}_T = +\mu g m \hat{x}$, $\vec{a}_T = 0.147 \hat{x}\ m/s^2$;
3. Nel riferimento della tavola calcolo il tempo necessario perché il corpo si fermi. L'accelerazione in questo riferimento é quella relativa:

$$\Delta t = \frac{v_m}{a_m - a_T} = .27\ s$$

.

4. $\Delta s = v_T \Delta t + \frac{1}{2} a_T \Delta t = 5.9\ cm$.

Soluzione dell'esercizio 5.7

1. momento si conserva: $mv = (M + m)V$, $V = 0.01\ m/s$;
2. energia si conserva: $\frac{1}{2}mv_2 = \frac{1}{2}(m + M)V^2 + mgh$, da cui $h = 5\ cm$;
3. si conservano entrambi: è un urto elastico $mv = MV' + mv'$ e $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2$, da cui $V' = \frac{2mv}{M+m} = 2\ cm/s$.
4. $W = mgh$ del punto 2

Soluzione dell'esercizio 5.8

1. Momento angolare iniziale è $L_0 = 2ml_0v_0/2 = 2m\left(\frac{l_0}{2}\right)^2\omega_0 = 1.4\cdot 10^{-2}\ kgm^2/s$. Le forze sono centrali, quindi il loro momento rispetto al baricentro è nullo, quindi $L_0 = L_1 = 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2\omega_1$. Quindi $\omega_1 = \frac{l_0^2\omega_0}{l_1^2} = 11.8\ rad/s$.
2. $W = E_k^{fin} - E_k^{ini}$; $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega^2 = 2\frac{1}{2}mv^2$
   $W = \frac{m}{4}\left(l_1^2\omega_1^2 - l_0^2\omega_0^2\right) = 0.31\ J$
3. $W = 2\int_{b_0/2}^{b_1/2} F dx = 2(b_1 - b_0)F$ quindi $F = \frac{m\omega_0^2}{8}\frac{b_0^2}{b_1^2}(b_1 + b_0) = 1.55\ N$.
   NB: la forza totale applicata sulle due masse deve tenere conto anche della forza centripeta necessaria per farle ruotare.

Soluzione dell'esercizio 5.9

1. M_B è disaccoppiato da M_A a causa della molla, che non trasmette forze impulsive: $V_B = 0\ m/s$
   conservazione q.tà di moto: $M_AV_A + mv = 0$, $v = v' + V_A$, da cui: $V_A = -1.43\ m/s$, $v = 3.57\ m/s$
2. $W = 1/2mv^2 + 1/2M_AV_A^2 - 0 = 714\ J$
3. Si conserva p e E; quando compressione è massima, i due carrelli si muovono alla stessa velocità:
   $M_AV_A' + M_BV_A' = M_AV_A$, $1/2M_AV_A^2 = 1/2(M_A + M_B)V_A'^2 + 1/2k\Delta x^2$, da cui: $k = \frac{M_AM_B}{M_A+M_B}\frac{V_A^2}{\Delta x^2} = 2.45\cdot 10^4\ N/m$
4. solo forze interne elastiche: $V_{CM} = \frac{M_AV_A}{M_A+M_B} = -0.57\ m/s$ costante. Moto rispetto al centro di massa, osillatore armonico: $\omega = \sqrt{\frac{\mu}{k}} = 14.3\ rad/s$ ($\mu = \frac{M_AM_B}{M_A+M_B} = 120\ kg$ massa ridotta), $T = 2\pi/\omega = 0.44\ s$.

Soluzione dell'esercizio 5.10

1. Uso come coordinate x di m_1 e θ di m_2 rispetto alla verticale.
   $U(x,\theta) = -m_2gl\cos\theta$, che ha un minimo per $\theta = 0, \quad \forall x$
2. l'energia totale si può scrivere come la somma dell'energia dei due punti. Per la massa m_1 è semplice, per m_2 serve scrivere le sue coordinate in termini di (x,θ) $x_2 = x + l\sin\theta$, $y_2 = l\cos\theta$, quindi $\vec{v}_2 = (\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta}, -l\sin\theta\dot{\theta})$, e quindi l'energia cinetica di m_2 risulta:

$E_{k,2} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 \left((\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})^2 + (-l\sin\theta\dot{\theta})^2 \right)$
che, sommata a $E_{k,1}$ fornisce:
$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta \right)$
E' una espressione complessa, che dipende da due variabile x, θ (e dalle loro derivate). Posso espanderla attorno alla posizione di equilibrio che ho ricavato prima ($\theta = 0$), e si riduce a:
$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x} \right)$
Sempre complessa, ma almeno dipende solo da $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$ (e non da x, θ).
Posso quindi usare la conservazione del momento lineare lungo x, visto che le forze esterne, cioe' la gravità e la reazione del vincolo, sono verticali:
$m_1\dot{x} + m_2 \left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \right) = 0$ (conservazione q.tà di moto lungo $\hat{x}$), da cui ricavo che $\dot{x} = \frac{-m_2 l\dot{\theta}}{m1+m_2}$, cioè una relazione tra $\dot{x}$ e $\dot{\theta}$. Sostiuisco nell'espressione precedente e trovo che, attorno a $\theta = 0$, $E_k = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2\dot{\theta}^2$
L'energia potenziale è decisamente più semplice: $U_{pot} = -m_2 lg(1 - \cos\theta) = +\frac{m_2 lg}{2}\theta^2$ (sempre sviluppata attorno all'equilibrio).
Mettendo tutto assieme si ricava che: $E_{tot} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2\dot{\theta}^2 + \frac{m_2 lg\theta^2}{2} + cost.$
Per analogia con l'energia totale di un oscillatore armonico: $E_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$, si ricava: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\mu}{m_2 g}}$, con μ massa ridotta del sistema.
Per $m_1 \gg m_2$, $\mu \to m_2$ e il periodo è quello di un pendolo normale.

Soluzione dell'esercizio 5.11

1. $F_{ext} = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = 0.129\ N$
2. il materiale che cade dal carrello non cade verticalmente, ma mantiene la stessa velocità orizzontale che aveva sul carrello, quindi la situazione non cambia e la forza necessaria rimane la stessa.
3. p si conserva, $v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \frac{dm}{dt}t}$ fino a quando il materiale inizia a cadere.

   Il materiale inizia a cadere quando $x(t) = \frac{m_0 v_0}{\frac{dm}{dt}} \ln\frac{m_0 + \frac{dm}{dt}t}{m_0} = l$, cioè quando $t^* = \frac{m}{\frac{dm}{dt}}\left(e^{\frac{l\frac{dm}{dt}}{m_0 v_0}} - 1 \right) = 22.7\ s$.

Soluzione dell'esercizio 5.12

1. Immagino che la palla grande arrivi a terra appena prima di quella piccola. Anche se le rilascio da ferme nello stesso istante, piccole perturbazioni nel rilascio faranno sì che una sia inizialmente più veloce dell'altra. Se la più veloce è quella grande, allora arriva prima al pavimento. Se è quella piccola, allora urterà quella grande durante la discesa e come prima quella grande arriverà per prima al pavimento.
   M urta il pavimento, e inverte la sua velocità.
   Considero ora un sistema di riferimento solidale a M. In questo sistema, la pallina m si avvicina a M con velocità relativa $2v$, e, dato che $M \gg m$, dopo l'urto (elastico) si allontana con velocità relativa uguale e opposta.

Rispetto al pavimento, la velocità di uscita di m è quindi $2v + v = 3v$, dato che M si sta allontanando dal pavimento con v.
Quindi: $h = \frac{1v'^2}{2g} = h_0(3^2) = 9h_0$.

2. Un ragionamento simile con tre palle fornisce $v'_3 = 7v$, con 4 $v'_4 = 15v$, il che suggerisce $v'_n = (2n+1)$ (si può dimostrare per induzione). Quindi $h_n = (2n+1)^2 h$. Quante palle ci vorrebbero per far uscire la pallina in alto dall'attrazione terrestre? Da notare che nel caso generico con n palle, inizia a diventare difficile che $M_{n+1} \gg M_n$ per tutte le coppie: inoltre risulta semper più difficile garantire che le palle restino allineate una sopra l'altra durante la caduta. Questo riduce la possibilità di espandere il cannone multiplo per n alti.
Bibliografia:

- Mellen, W., "Aligner for elastic collisions of dropped balls", **The Physics Teacher** 33, 56 (1995)
- Cross, R., "Vertical bounce of two vertically aligned balls", **Am. J. Phys.** 75, 1009 (2007)

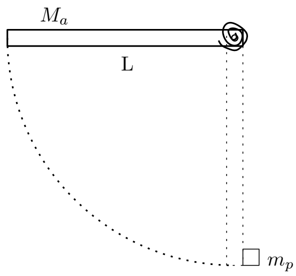
Soluzione dell'esercizio 5.13

1. Con $'$ si indicano le quantità relative al sistema di riferimento solidale con il carrello, mentre quelle senza apice sono quelle rispetto al sistema di rifieriemento a terra. Se il carrello si muove all'indietro con velocità V, allora: $\vec{v} = \vec{v}' - \vec{V}$,
Quindi: $\vec{v} = (v'_0 \cos\theta - V)\hat{x} + v'_0 \sin\theta\hat{y}$.
Lungo l'asse orizzontale non ci sono forze esterne, quindi p_x si conserva: $mv'_0 \cos\theta' - MV = 0$; combinando le due equazione, si ricava $V = V_c = \frac{mv'_0 \cos\theta'}{M+m} = 2.0\ m/s$.
2. $\vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 299\ m/s$
3. $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v'_0 \sin\theta'}{v'_0 \cos\theta' - V} = 1.76$, $\theta = 60.3°$
Da notare che il rapporto tra le masse $M/m \sim 75$, quindi il rinculo del carrello con il cannone è limitato.

Parte II
Meccanica corpo rigido

6 Dinamica del corpo rigido

Esercizio 6.1

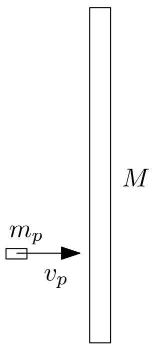


Un'asta ($M_a = 2\ kg$, $L = 70\ cm$) è fissata ad una parete verticale ad una estremità, dove è collegata ad una molla torsionale, ($k = 0.5\ Nm/rad$) che è a riposo quando l'asta è verticale.
L'asta viene lasciata cadere da ferma e, quando passa per la verticale, colpisce una massa $m_p = 1.2\ kg$, inizialmente ferma, che si muove orizzontalmente con $v_p = 2.2\ m/s$ dopo l'urto.

Determinare:

1. ω_0 dell'asta al momento dell'urto;
2. ω_1 dell'asta subito dopo dell'urto;
3. l'energia W_d dissipata nell'urto;
4. l'impulso J trasferito nell'urto al vincolo.

Esercizio 6.2

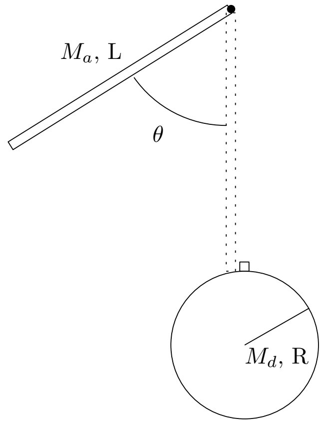


Un'asta ($M = 1\ kg$, $L = 40\ cm$) libera di muoversi su un piano orizzontale, inizialmente ferma, viene colpita perpendicolarmente da un proiettile ($m = 20\ g$) con velocità $v_0 = 20\ m/s$, ad una distanza $x_0 = 10\ cm$ dal centro. Dopo l'urto il proiettile rimane incastrato.

Calcolare:

1. il moto del sistema asta-proiettile dopo l'urto;
2. l'energia dissipata nell'urto.
3. che succede se invece l'asta è vincolata all' estremità più lontana rispetto al punto di impatto del proiettile?

Esercizio 6.3



Un'asta di lunghezza $L = 1\ m$ e massa $M_a = 1.2\ kg$, vicolata ad una estremità, viene fatta cadere, da ferma, da un angolo $\theta = 60°$ rispetto alla verticale.
Quando l'asta è verticale, essa urta un piccolo dente all'estremità di un disco di raggio $R = 0.2\ m$ e massa M_d, vincolato a ruotare attorno al suo centro.
L'urto è elastico e la velocità angolare dell'asta dopo l'urto si dimezza.

1. ω_d del disco dopo l'urto;
2. M_d del disco.

Esercizio 6.4

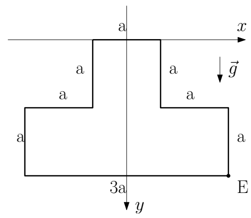
Una fune ideale è collegata ad una carrucola di raggio $R = 0.5\ m$ e massa $M = 2.0\ kg$, priva di attriti, vincolata a ruotare attorno al suo centro. All'istante $t = 0\ s$, la fune, inizialmente ferma, viene tirata verso il basso con una forza costante $F = 9.8\ N$.

1. l'accelerazione angolare α della carrucola;
2. l'accelerazione $\vec{a}_A$ di un punto A posto sul bordo della carrucola, all'istante $t = 0.25\ s$;
3. la reazione del vincolo $\vec{R}$;
4. α' e $\vec{R}'$ se invece di tirare verso il basso la corda gli si appende una massa m con forza peso $F_p = F$;

La massa m si ferma a terra e, con la fune tesa, viene applicato un momento $\tau = 10\ Nm$ per far salire la massa:

5. ΔE_{mecc} della massa quando $h = 1.0\ m$.

Esercizio 6.5



Una lastra rigida, uniforme, con densità di massa $\sigma = 30\ kg/m^2$, ha la forma in figura, con $a = 12\ cm$. Essa è vincolata a ruotare attorno all'asse x. Calcolare:

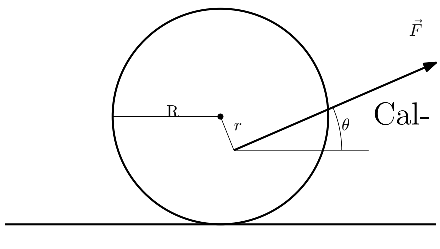
1. il centro di massa del sistema;
2. il momento d'inerzia rispetto all'asse x.

La lastra viene colpita nel punto E da un punto materiale di massa $m = 500\ g$ e $v = 50\ m/s$, perpendicolarmente al piano (x, y), e il proiettile rimane attaccato alla lastra. Calcolare:

3. ω dopo l'urto;
4. l'energia dissipata nell'urto;
5. il periodo delle piccole oscillazioni.

Esercizio 6.6

Un disco di massa $M = 2.5\ kg$ e raggio $R = 35\ cm$ rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Una forza esterna $F_{ext} = 125\ N$ viene applicata sul disco in modo tale che la distanza tra la retta di applicazione e il centro del disco sia $r = 12\ cm$, e che la retta formi un angolo $\theta = 30°$ rispetto al piano come in figura. Calcolare:



1. l'accelerazione a del disco;
2. la forza di attrito F_{att} tra il disco e il piano;
3. discutere i risultati al variare di r e $\cos\theta$.

Esercizio 6.7

Una sfera di raggio $R = 14\ cm$ e massa $M = 5.6\ kg$, si muove senza rotolare su un piano orizzontale liscio con $v_0 = 3.4\ m/s$. Ad un certo punto il piano diventa scabro, con coefficente di attrito dinamico $\mu = 0.3$: a regime il moto è di puro rotolamento.

Determinare:

1. il tempo necessario per arrivare ad un moto di puro rotolamento;
2. la velocità di regime;
3. l'energia dissipata;
4. da chi viene dissipata? Discutere.

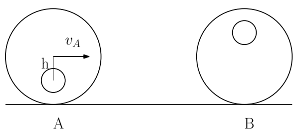
Esercizio 6.8

Un'asta rigida $l = 60\ cm$ e $M = 100\ g$ è imperniata ad una estremo O su un piano verticale. Ad una distanza x da O, viene applicata una forza $F = 10\ N$, perpendicolarmente all'asta, per $\Delta t = 5.0\ ms$. Calcolare:

1. x perché la reazione del vincolo sia nulla;
2. la velocità del CM e l'energia cinetica dopo l'impulso;
3. l'angolo massimo θ_{max};
4. Il periodo delle oscillazioni;
5. v_{max} e a_{max}.

Esercizio 6.9

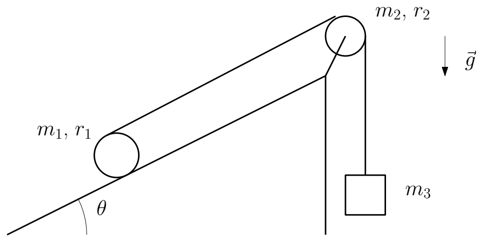
Un disco $R = 30\ cm$ e $M = 30\ kg$ ha un secondo disco di $r = 12\ cm$ e $m = 12\ kg$ fissato ad una distanza (centro-centro) di $h = 15\ cm$. Il sistema poggia su un piano orizzontale e si muove con un moto di puro rotolamento, con velocità iniziale $v_a = 1.5\ m/s$, e inizialmente il secondo disco si trova nella posizione più bassa.



1. Energia cinetica in A;
2. la velocità del disco nel punto B, dove il secondo disco è nella posizione più alta;
3. la reazione del piano in A;
4. la reazione del piano in B;

Esercizio 6.10

Il sistema in figura è in equilibrio: $m_1 = 12\ kg$, $R_1 = 10\ cm$; $m_2 = 5\ kg$, $R_2 = 5\ cm$; m_3, $\theta = 30°$. Il corpo m_1 rotola senza strisciare sul piano, e la fune (ideale) è arrotolata attorno ad esso. La fune non striscia neppure sulla carrucola m_2.



Determinare:

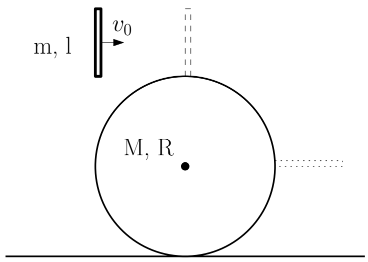
1. m_3;
2. La forza d'attrito su m_1

Sia $m_3 = 4\ kg$. Calcolare:

3. a_3, a_1, $F^{(1)}_{att}$;
4. reazione vincolare sulla carrucola;
5. l'energia cinetica del sistema quando m_3 è sceso di $h_3 = 1.0\ m$.

Esercizio 6.11

Un disco $M = 1\ kg$ e $R = 10\ cm$, incernierato al centro poggia su un piano orizzontale in quiete. Una sbarretta $L = 8\ cm$ e $m = 0.25\ kg$, si muove con velocità $v_0 = 50\ cm/s$ e colpisce il disco come in figura, rimanendo attaccata finichè il sistema ruota di mezzo giro, quindi si stacca.



Determinare:

1. ω sistema dopo l'urto;
2. impulso trasmesso al vincolo durante l'urto;
3. ΔE_k nell'urto;
4. la forza tra sbarra e disco durante la rotazione;
5. il moto del disco e della sbarra dopo il distacco.

Esercizio 6.12

Un blocco di massa $M = 1.5\ kg$ scivola lungo un piano inclinato di $\delta = 20°$, con attrito dinamico $\mu = 0.2$. Una sbarretta rigida di massa trascurabile collega il blocco ad un cilindro di massa $M_c = 2\ kg$ che rotola senza strisciare. Il sistema parte da fermo e percorre una distanza $d = 1.5\ m$

Calcolare:

1. la velocità del sistema;
2. la forza di attrito statico tra cilindro e piano;
3. la forza che la sbarretta esercita sui due corpi;
4. per quale angolo δ di inclinazione del piano questa si annulla.

Esercizio 6.13

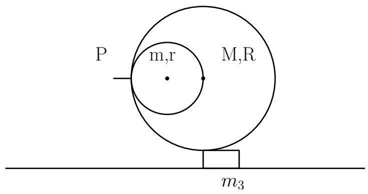
Un carrello di massa complessiva $M = 10\ kg$ (comprese le 4 ruote) si muove con velocità iniziale $v_0 = 6\ m/s$ su un piano orizzontale. Le ruote hanno ciascuna massa $m = 1\ kg$ e raggio $r = 50\ cm$, rotolano senza strisciare. All'istante $t = 0s$, il carro frena, applicando un momento frenante su ciascuna delle ruote $\tau = 7.5\ Nm$ costante, le ruote non slittano.

Calcolare:

1. accelerazione angolare α e $F_{attrito}$ delle ruote;
2. lo spazio di frenate s;
3. lavoro compiuto dai freni W_d;
4. lo spazio di frenata s' se le ruote si bloccano e $\mu_d = 0.2$.

Esercizio 6.14

Un disco omogeneo, vincolato al centro, $M = 4kg$, $R = 20cm$, ruota con attrito costante $\tau = 0.5\ Nm$. Un secondo disco $m = 2kg$ e $r = 10\ cm$ è fissato al primo come in figura. Un perno allineato con i due centri è presente sul bordo del disco, che viene lasciato libero di ruotare.

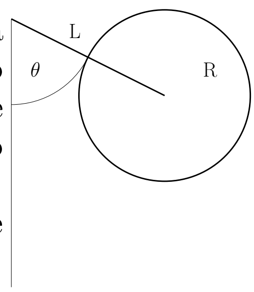


Il perno urta una massa $m_3 = 1.5\ kg$ che si trova su un piano scabro $\mu_d = 0.2$, che si ferma dopo l'urto in $\Delta l = 50cm$.
Determinare:

1. ω_0 prima dell'urto;
2. ω_1 dopo l'urto;
3. Impulso del vincolo durante l'urto.

Esercizio 6.15

Una sbarra di lunghezza $L = 1\ m$ e massa $m_a = 6\ kg$, è incernierata ad una estremità ad un perno. All'altra estremità si trova un disco di massa $M_d = 24\ kg$ e raggio $R = 0.5\ m$, incernierato al centro e inizialmente fissato rigidamente alla sbarra. Il sistema si trova fermo ad un angolo $\theta = 60°$ rispetto alla verticale e viene lasciato libero. Quando passa la verticale, il disco viene lasciato libero di ruotare attorno al suo centro, senza attrito.

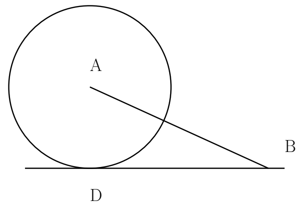


Determinare:

1. ω sistema alla verticale;
2. θ'_{max} dall'altra parte;
3. Il periodo delle piccole oscillazioni con disco fisso;
4. il periodo delle piccole oscillazioni con disco mobile.

Esercizio 6.16

Un'asta di lunghezza $L = 1.2\ m$ e massa $m_a = 5\ kg$, striscia su un piano scabro con l'estremità B, mentre l'altra estremità A è fissata al centro di un disco di raggio $R = 0.6\ cm$ e massa $m_d = 2\ kg$, senza attriti. Il disco rotola senza strisciare, e si muove con velocità costante v verso sinistra essendo sottoposto ad un momento $\tau = 1.8 Nm$.



Determinare:

1. la forza di attrito su B;

Supponendo che l'attrito sia trascurabile:

2. l'accelerazione del sistema;
3. la forza esercitata sull'estremo A.

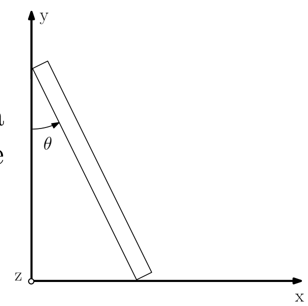
Esercizio 6.17

Una motocicletta di massa $m = 300\ kg$, con interasse $l = 1480\ mm$, ha il peso ripartito al 55% (R_p) sulla ruota posteriore e 45% (R_a) su quella anteriore e l'altezza del baricentro $h = 70\ cm$.

1. quale è l'accelerazione massima per partire senza impennare, supponendo che le ruote non slittino?
2. supponendo che la coppia massima all'albero sia 103 Nm, il raggio delle ruote 30.5 cm, e il rapporto di trasmissione in prima marcia $2.384 \cdot 45/15$, riesce ad impennare?
3. quali sono le reazioni delle ruote sull'asfalto in caso di frenata?
4. quale è la massima coppia frenante che posso applicare all'anteriore perchè il posteriore non si alzi?

Esercizio 6.18

Una asta lunga l e di massa M è incernierata ai due estremi a due assi cartesiani x, y, come in figura. Inizialmente è verticale e ferma: una piccola perturbazione la fa cadere.

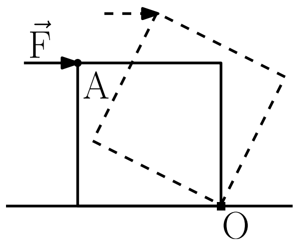


Calcolare:

1. ω quando è orizzontale;
2. la forza esercitata dai vincoli N_x, N_y;
3. il moto del centro di massa;
4. nell'ipotesi che il vincolo lungo y sia unilaterale, quando si stacca dalla parete.

Esercizio 6.19

Un cubo di ferro di spigolo $d = 12\ cm$ e massa $13.6\ kg$, viene spinto orizzontalmente su un piano da una forza costante $F = 100\ N$, applicata nel punto A (spigolo della faccia superiore), e è bloccato da un fermo nello spigolo opposto (O), come in figura.



1. F_{min} minima per alzare il cubo;
2. l'accelerazione angolare iniziale α_0;
3. la reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dal blocco in O nello stesso istante;
4. il lavoro W_F compiuto dalla forza F dall'inizio a quando il blocco inizia a cadere oltre O;
5. la velocità angolare ω in tale istante.

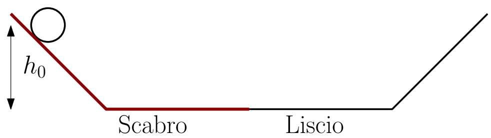
Esercizio 6.20

Calcolare il momento d'inerzia di una sfera rispetto ad un suo diametro (asse z)

1. facendo esplicitamente l'integrale $I_z = \int_V \rho^2 dm$;
2. usando il momento d'inerzia di un disco $I_{disco} = mr^2/2$;
3. calcolando il momento d'inerzia di un guscio sferico.

Esercizio 6.21

Una sfera $m = 100\ g$ si trova su una vasca con i bordi inclinati ($\theta = 45°$), ad una altezza $h = 80\ cm$. Viene lasciata libera da ferma e rotola senza strisciare verso il fondo della vasca. La superfice della vasca diventa perfettamente liscia a metà del percorso della sfera, con continua il suo moto e risale sulla parete opposta.

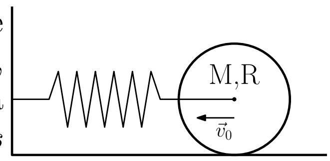


Si chiede:

1. la forza d'attrito $\vec{F}$ sulla sfera all'inizio della discesa;
2. la velocità v_0 con la quale la sfera si muove sul fondo della vasca;
3. l'altezza massima h_{max} che raggiunge sulla parete opposta;
4. h'_{max} se il moto resta ovunque di puro rotolamento.

Esercizio 6.22

Un disco omogeneo ($R = 40\ cm$, $M = 0.5\ kg$) è appoggiato su un piano orizzontale e collegato ad una molla orizzontale ($k = 42\ Nm/$) fissata al suo asse. Il piano è scabro ($\mu_d = 0.6$, μ_s sufficiente a garantire un moto di puro rotolamento). La molla è inizialmente a riposo, e il disco si si muove con $v_0 = 0.8\ m/s$ comprimendo la molla. Calcolare:



1. il massimo accorciamento della molla;
2. la massima $F_{attrito}$ durante il moto;

Quando il disco torna alla posizione iniziale, viene colpito da un proiettile, di massa $m = 40\ g$, che viaggia orizzontalmente in direzione opposta, e che si incastra al centro del disco, arrestandone il moto.

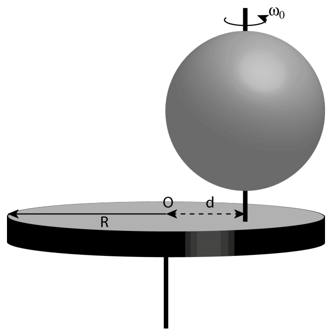
3. la velocità del proiettile;
4. l'energia persa nell'urto;
5. l'accelerazione del CM dopo l'urto;

Esercizio 6.23

Due dischi identici (A,B $M = 15\ kg$, $R = 20\ cm$) sono appoggiati l'uno sopra l'altro tramite un sottile anello di raggio $R/2$. Il coeff. di attrito tra i due dischi è $\mu = 0.2$, e possono ruotare attorno ad un asse comune. Si applica un momento costante $\tau = 8.8\ Nm$ al disco piu' basso per $N_A = 20\ giri$. Calcolare:

1. il numero di giri fatti dall'altro disco N_B;
2. $\omega_{A,B}$ dopo $N_A = 20\ giri$;
3. W sul sistema dalle forze esterne;
4. la velocità angolare dei dischi quando ruotano insieme;
5. W dissipata;
6. il numero di giri relativi.

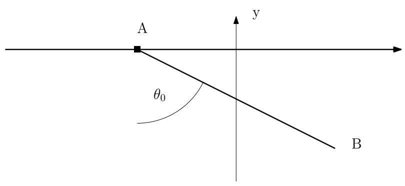
Esercizio 6.24



Un disco ($R = 20\ cm$, $M = 1\ kg$) è può ruotare senza attrito attorno al suo asse. Il disco sostiene una sfera, ($r = R/2$, M), che ruota attorno ad un asse verticale, solidale al disco, che si trova ad una distanza $d = R/2$ dal centro O del disco.
Il disco è in quiete e la sfera ruota con una velocità angolare $\omega_0 = 5\ giri/s$. Ad un certo istante inizia ad agire sull'asse della sfera un momento di attrito. Determinare:

1. La velocità angolare del disco quando la sfera è ferma rispetto ad esso;
2. L'energia dissipata dal momento di attrito;
3. L'angolo che la reazione in O forma con la verticale quando la velocità angolare del disco è ω_1;

Esercizio 6.25



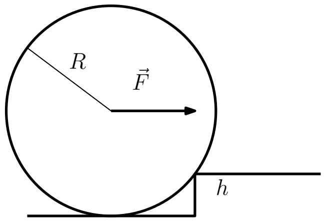
Un'asta lunga $L = 1.5\ m$, $M = 2\ kg$ è appesa ad una estremità ad un asse orizzontale con un manicotto che si muovo liberamente lungo tale asse. Inizialmente l'asta è inclinata di $\theta_0 = 60°$ rispetto alla verticale e viene lasciata cadere.

Calcolare:

1. traiettoria del centro di massa della sbarra;
2. l'equazione del moto attorno alla posizione di equilibrio;
3. velocità angolare nel punto più basso;
4. reazione vincolare nel punto più basso.

Esercizio 6.26

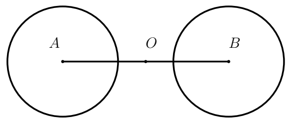
Una ruota di raggio $r = 25\ cm$ e masas $m = 20\ kg$ è appoggiata piano orizzontale ed ad un gradino di altezza $h = 10\ cm$, inzialmente in quiete. Sull'asse della ruota viene applicata una forza costante ed orizzontale $F = 300\ N$. Si chiede:



1. se la forza è sufficiente per far salire il gradino alla ruota;
2. la velocità della ruota quando è salita sul gradino;
3. la velocità con la quale colpisce il piano se viene lasciata cadere dalla spigolo del gradino.

Esercizio 6.27

Due dischi di massa $m = 0.4\ kg$ e $r = 0.3\ m$ sono posti all'estremità di una asta $M = 0.6\ kg$, $L = 1.0\ m$, e sono liberi di ruotare attorno ai propri assi A, B. L'asta è libera di ruotare attorno al suo centro O. Si applica sull'asta un momento $\tau = 4(\theta + \pi)\ Nm$ per 5 giri. Calcolare:



1. la velocità angolare ω_0 del sistema;

Ad un certo instante, si attiva frizione tra il disco A e il suo asse

2. la velocità angolare ω_1 del sistema a regime;

Successivamente, si blocca la rotazione dell'asta, e si fa ruotare B attorno al suo asse con ω_1, sempre lasciando bloccato A e si attiva frizione tra B e l'asta

3. la nuova velocità angolare ω_2 a regime e l'energia dissipata;
4. il moto del disco B se il suo asse si spezza istantaneamente;
5. le forze sull'asse O dopo il distacco del disco B;

Soluzione dell'esercizio 6.1

1. Conservazione dell'energia: $\frac{1}{2}I\omega^2 - M_a g \frac{L}{2}\sin\theta = \frac{k\theta^2}{2}$, da cui $\omega_0 = 6.8\ rad/s$
2. Forze interne, L si conserva. $I\omega_0 = I\omega_1 + m_p v_p L$; $\omega_1 = \omega_0 - \frac{m v_p L}{\frac{M_a L^2}{3}} = 1.15\ rad/s$
3. $W_d = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 - \frac{1}{2}m_p v_p^2 = 4.44\ J$;
4. calcolo la variazione del momento della quantità di moto: $\Delta p = \frac{M_a\omega_0 L}{2} - \left(\frac{M_a\omega_1 L}{2} + m_p v_p\right) = 1.32\ Ns$. L'impulso J è $-\Delta p$

Soluzione dell'esercizio 6.2

1. il momento si conserva $v_{CM} = \frac{mv_0}{M+m} = 0.39\ m/s$, dove il centro di massa $x_{CM} = \frac{M0+mx_0}{M+m} = 2\ mm$ dal centro dell'asta.
   Anche il momento angolare rispetto al centro di massa si conserva $L_{CM}^{ini} = mv_0(x_0 - x_{CM})$, $L_{CM}^{fin} = I_{tot}\omega_{CM}$, con $I_{tot} = \frac{ML^2}{12} + Mx_{CM}^2 + m(x_0 - x_{CM})^2 = 1.4 \cdot 10^{-2}\ kgm$. Quindi $\omega_{CM} = 5.14\ rad/s$.
2. $E_k^{ini} = \frac{1}{2}mv^2 = 4\ J$, $E_k^{fin} = \frac{1}{2}(M+m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{tot}\omega^2 = 0.26\ J$. Quindi $W_d = \Delta E_k = 3.75\ J$.
3. Si conserva il momento angolare rispetto al vincolo: $L_A = mv_0(L/2 + x_0) = (ML^2/3 + m(L/2+x_0)^2)\,\omega'$, da cui $\omega_1 = 1.62\ rad/s$, e impulso del vincolo durante l'urto pari a $J = \omega'(L/2 + x_0)(M+m) - mv_0 = 0.036$ in direzione opposta al proiettile.

Soluzione dell'esercizio 6.3

1. Uso conservazione energia per calcolare la velocità angolare dell'asta prima dell'urto:
   $\frac{1}{2}I_a\omega_0^2 = M_a g\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$ con $I_a = \frac{M_a L^2}{3}$: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)} = 3.83\ rad/s$
   L'urto è elastico, quindi uso conservazione dell'energia durante l'urto elastico: $\frac{1}{2}I_a\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_a{\omega_0'}^2 + \frac{1}{2}I_d\omega_d^2$, con $\omega_0' = \omega_0/2$, ovvero: $\frac{M_a L^2}{2}\omega_0^2 = M_d R\omega_d^2$.
   Durante l'urto le forze scambiate tra asta e disco sono uguali e contrarie, quindi anche l'impulso subito dall'asta e quello subito dal disco sono uguali e contrari: $J_a = -J_d$. Durante l'ulto vi sono anche altre forze impulsive su asta e disco dovute ai rispettivi vincoli, di cui non sappiamo nulla.
   Se considero l'asta, il momento delle forze durante l'urto calcolato rispetto al suo vincolo risulta essere $LF(t)$, dove $F(t)$ è la forza, impulsiva, scambiata con il disco durante l'urto.
   Se integro nel tempo dell'urto:
   $$LJ_a = \int LF(t)dt = \int \tau(t)_a dt = \int \frac{dL_a}{dt}dt = \int dL_a = \Delta L_a$$
   dove si è usata la seconda eq. caridinale della meccanica per l'asta, rispetto al vincolo. L'altra forza impulsiva ignota, quella generata dal vincolo, non fornisce momento.
   Un analogo ragionamento si può fare per il disco, e si ricava $RJ_d = \Delta L_d$, dove il momento angolare in questo caso è calcolato rispetto al centro del disco (vincolo).

Quindi $\frac{\Delta L_a}{L} = -\frac{\Delta L_d}{R}$ con $L_{a,d}$ il momento angolare dell'asta rispetto all'estremità fissa e del disco rispetto al suo centro, rispettivamente.

$$\frac{\Delta L_a}{L} = I_a(\omega_0 - \omega_1) = \frac{M_a L}{3}(\omega_0 - \frac{\omega_0}{2}) = \frac{M_a L^2}{6}\omega_0 = \frac{\Delta L_d}{R} = I_d \omega_d = \frac{MR^2}{2}\omega_d$$

, da cui si ricava $M_a L \omega_0 = 3 M_d R \omega_d$.
Risolvendo il sistema ottengo $\omega_d = \frac{3L}{2R}\omega_0 = 28.8\ rad/s$ e $M_d = \frac{2}{9}M_a = 0.27\ kg$.

Soluzione dell'esercizio 6.4

1. $\tau = FR = \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta}$: $\ddot{\theta} = \frac{2F}{MR} = 19.6\ rad/s^2$;
2. $\vec{a}_A = \ddot{\theta} R \hat{u}_r + \dot{\theta(t)}^2 R \hat{u}_T = 9.8\hat{u}_r + 12\hat{u}_T$ usando $\dot{\theta} = \ddot{\theta} t$
3. Su disco agiscono $\vec{F} + M\vec{g} + \vec{R} = 0$, quindi $\vec{R} = -(\vec{F} + M\vec{g}) = 29.4\ N$ diretta verso l'alto.
4. Il sistema è diverso da prima, perchè adesso abbiamo una seconda massa m con la sua inerzia, di cui dobbiamo tenere conto.

$$\begin{aligned} \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} &= TR \\ mg - T &= m\ddot{x} \\ x &= R\theta \end{aligned}$$

   Da cui ricavo: $T = m(g - \ddot{\theta}R)$, e $\ddot{\theta} = \frac{2mg}{R(M+2m)} = 9.8\ rad/s^2$ e $T = \frac{MR}{2}\ddot{\theta} = 4.9\ N$.
   $R' = -(T + Mg) = 24.5\ N$ sempre diretto verso l'alto.
5. $L = \int F dx = \int \tau d\theta = \tau \Delta\theta = N\frac{h}{R} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_d\omega^2$.
   $\frac{1}{2}I_d\omega^2 = \frac{M_d R^2}{2}\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}Mv^2$, quindi $v = \sqrt{\frac{\frac{\tau h}{R} - mgh}{\frac{m}{2} + \frac{M}{4}}} = 3.2\ ms$.
   $\Delta E_{mecc} = E_{mecc}^{fin} - 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 14.9\ J$.

Soluzione dell'esercizio 6.5

1. Penso alla lastra come 4 lastre quadrate identiche di lato a. Il centro di massa è il centro di massa del sistema di 4 punti, di massa $a^2\sigma$ posti nel centro geometrico di ciascuna lastra quadrata.
   $x_{cm} = 0$ (per simmetria) $y_{cm} = \frac{5}{4}a = 15\ cm$.
2. Momento d'inerzia di una lastra quadrata rispetto ad un lato: $I = \frac{a^4\sigma}{3}$. Applico Steiner e ottengo il momento d'inerzia totale: $I_{tot} = \left(\frac{1}{3} + 7\right) a^4\sigma = 4.6 \cdot 10^{-1} kgm^2$. L'applicazione di Steiner va fatta due volte: la prima volta per ricavare I rispetto al CM sapendo quello rispetto al lato: $I_{lato} = I_{CM} + M(a/2)^2$. La seconda volta per ricavare I rispetto all'asse di rotazione.
3. Durante l'urto si conserva L rispetto all'asse $\hat{x}$. $L_{ini} = 2amv = L_{fin} = I\omega = (I_{tot} + m(2a)^2)\omega$, da cui $\omega = 80\ rad/s$.
4. $E_{ini} = \frac{1}{2}mv^2$, $E_{fin} = \frac{1}{2}\left(I_{tot} + m(2a)^a\right)\omega^2$ $W_d = E_{fin} - E_{ini} = 385\ J$.

5. $\left(I_{tot} + m(2a)^2\right) \ddot{\theta} = (4a^2\sigma + m) g R_{cm} \theta$, dove $R_{cm} = \frac{y_{cm} 4a^2\sigma + 2am}{4a^2\sigma + m} = 17cm$
   $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.89s$.

Soluzione dell'esercizio 6.6

1.
2. le equazioni della dinamica per il disco sono le seguenti, calcolando il moto del centro di massa (CM) lungo il piano, e i momenti rispetto al CM; la terza equazione si ottiene dall'informazione che il disco rotola senza strisciare:

$$
\begin{aligned}
Ma &= F_{ext}\cos\theta - F_{att} \\
I_{cm}\alpha &= F_{ext} r - F_{att} R \\
\alpha &= -\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

   Risolvendo il sistema:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{F_{ext}\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right) R^2}{MR^2 + I_{CM}} = 17.4\ m/s^2 \\
F_{att} &= \frac{F_{ext}\left(I_{CM}\cos\theta + MRr\right) R^2}{MR^2 + I_{CM}} = 64.7\ N
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 6.7

1. Equazioni della dinamica per la sfera:

$$
\begin{aligned}
Ma &= \mu M g \\
I_{cm}\alpha &= \mu M g R
\end{aligned}
$$

   da cui ricavo: $\alpha = \frac{5\mu g}{2R}$ e $a = \mu g$, entrambe costanti.
   Si avrà moto di puro rotolamento quando $v(t) = v_0 - at = \omega(t) R = \alpha t R$, da cui ricavo $t = \frac{2v_0}{7\mu g} = 0.33\ s$
2. a regime il moto è di puro rotolamento: $v_{regime} = v_0 - at = \frac{5}{7} v_0 = 2.5\ m/s$ e $\omega_{regime} = \frac{v_{regime}}{R} = 17.8\ rad/s$
3. $\Delta E_k = \frac{1}{2} M v_{regime}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{regime}^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 = 7.9\ J$
4. Questa energia è dissipata dalla forza di attrito durante la transizione tra il moto di puro scivolamento e quello di puro rotolamente, quando c'è moto relativo tra il piano e il punto di contatto della sfera con il piano stesso. Successivamente il sistema è conservativo.
   La velocità del punto di contatto della sfera con il piano è pari a $v_p = v_{cm} - \omega R = v_0 - \frac{7}{2}\mu g t$, quindi lo spazio percorso dal punto di contatto rispetto al piano è: $\Delta x_p = v_0 t - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\mu g\right) t^2 = \frac{1}{7}\frac{v_0^2}{\mu g} = 0.48\ cm$

L'energia dissipata si può anche scrivere: $W_d = -\Delta E_k = \frac{1}{7}Mv^0$. Il lavoro della forza d'attrito è $\mathcal{L} = \mu Mg\Delta x_p = \frac{1}{7}Mv_0^2$ *QED.*

Soluzione dell'esercizio 6.8

1. Se reazione vincolo è nulla: $J = \int F_{ris}dt = \int Fdt = \Delta p = Mv_{cm}$ Quindi $v_{cm} = \frac{J}{M}$ Calcolo i momenti rispetto al polo O: $\int Fxdt = Jx = \Delta L = \frac{Ml^2}{3}\frac{v_{cm}}{L/2} = \frac{2}{3}Mlv_{cm}$, da cui ricavo $x = \frac{2}{3}l = 40\ cm$.
2. $v_{cm} = 0.5\ m/s$
3. $mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta_{max}) = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{2}{3}Mv_{cm}^2$ $\theta_{max} = 0.34\ rad$
4. equazione del moto è $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$, quindi $T = 1.27\ s$.
5. v_{max} per $\theta = 0$ è proprio v_{cm} del punto 2. a_{max} ...

Soluzione dell'esercizio 6.9

1. $E_k^A = \frac{1}{2}I_A\omega_a^2$ $I_a = \frac{MR^2}{2} + MR^2 + \frac{mr^2}{2} + m(R-h)^2 = 4.4kgm^2$ $\omega_A = \frac{v_A}{R} = 5rad/s$, $E_k^A = 55\ J$.
2. $E_k^B = E_k^A - \Delta U_{grav} = E_k^A - 2mgh = 20\ J = 1/2I_B(v_B^2/R^2)$.
   Quindi: $v_b = \sqrt{\frac{2E_K^BR^2}{I_B}} = 0.73\ m/s$.
   I_B si calcola come nel punto precedente, tenendo conto che adesso il disco piccolo si trova ad una distanza $R+h$ dal punto B.
   $I_B = 1/2MR^2 + MR^2 + 1/2mr^2 + m(R+h)^2 = 6.6\ kgm^2$
3. $N_A = (M+m)g + m\omega_A^2h = 457\ N$. Il secondo addendo è dovuto alla forza centripeta necessaria per far ruotare il disco piccolo con una velocità angolare ω_A attorno al centro del disco grande.
4. stesso conto, ma disco piccolo adesso si trova in alto, quindi la direzione della forza centripeta è opposta.
   Per ricavare $\omega_B = \sqrt{\frac{2E_k^B}{I_B}} = 2.4\ rad/s$
   $N_B = (M+m)g - m\omega_B^2h = 401\ N$

Soluzione dell'esercizio 6.10

1. $m_3 = 3\ kg$
2. $F_{att} = 29.4\ N$ verso l'alto.
3. $a_1 = \frac{a_3}{2} = 0.45\ m/s^2$
4. dalla eq. della dinamica del corpo m_3: $T_{23} = m(g-a_3) = 35.7N$;
   per il corpo m_2: $\frac{1}{2}m_2R_2^2\frac{a_3}{R_2} = R_2(T_{12} - T_{23})$, da cui $T_{12} = 33.4\ N$
   Da cui ricavo $N_2 = 103.4\hat{y} + 32.4\hat{x}\ N$
5. $E_k = m_3gh - m_1g\frac{h}{2}\sin\theta = 9.8\ N$.

Soluzione dell'esercizio 6.11

1. Conservo L rispetto al perno: $mv(R+L/2) = I\omega = \left(\frac{MR^2}{2} + \frac{ml^2}{12} + m(R+L/2)^2\right)\omega$ da cui $\omega = 1.74\ rad/s$.

2. $J = (M+m)v_{cm} - mv_0 = (M+m)\omega\frac{m(R+L/2)}{M+m} - mv_0 = -0.064\ Ns$;
3. $\Delta E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -0.016\ J$;
4. Serve una forza centripeta $F = m\omega^2(R+L/2)$ che è fornita da parte della forza peso e dalla forza di interazione. Quindi: $F_{int} = m\left(\omega^2(R+L/2) - g\cos\theta\right)$;
5. Non ci sono forze impulsive durante il distacco: quindi il disco continua a ruotare con ω', mentre la sbarretta continua a ruotare con ω e il suo centro di massa si muove verso il basso con $v = \omega'(R+L/2)$ e il moto è gravitazionale. Si noti che ω' cambia rispetto ad ω subito dopo l'urto perchè durante la discesa agisce la forza peso sulla sbarretta, accelerando la rotazione. Si può calcolare con la conservazione dell'energia: $\omega' = 6\ rad/s$ (da controllare)

Soluzione dell'esercizio 6.12

1. Dalla conservazione dell'energia: $\frac{1}{2}(M+M')v^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - (M+M')gd\sin\delta = -\mu Mg\cos\delta d$ da cui ricavo v $(omega = v/R)$;
2. Equazione della dinamica per i due corpi, proiettate lungo il moto:

$$Ma = Mg\sin\delta - \mu Mg\cos\delta - F_{sbarretta}$$
$$M'a = M'g\sin\delta - F_{att\ stat} + F_{sbarretta}$$

   Da cui ricavo $(M+M')a = (M+M')g\sin\delta - \mu Mg\cos\delta - F_s = cost$ e $a = \frac{v^2}{2d}$.
   Quindi $F_s = (M+M')(g\sin\delta - a) - Mg\cos\delta\mu d$
3. la ricavo da una delle equazione del moto;
4. Calcolando i momenti delle forze sul cilindro rispetto al CM del cilindro: $F_sR = I_c\alpha$, quindi $F_s = \frac{M'R^2}{2}\frac{a}{R^2} = \frac{M'a}{2}$
   $M'g\sin\delta - F_s = M'(g\sin\delta - a/2) = M'a$, quindi $a = \frac{2}{3}g\sin\delta$
   Forza nulla quando i due corpi si muovono con la stessa accelerazione
   $Mg(\sin\delta - \mu\cos\delta) = M'a = M'\frac{2}{3}g\sin\delta$, da cui ricavo δ

Soluzione dell'esercizio 6.13

1. Usando anche condizione di puro rotolamente delle ruote;

$$4F_{attrito} = Ma = M\alpha R$$
$$\tau_{freno} - F_{attrito}R = 1/2mR^2\alpha$$

   da cui ricavo $\alpha = \frac{\tau_{freno}}{1/2mR^2 + 1/4MR^2} = 10\ rad/s$ $F_{attrito} = M\alpha R/4 = 12.5\ N$
2. Rotolamento ruote: $\omega = \omega_0 - \alpha t$, quindi il carrello si arresta in $t = \omega_0/\alpha = v_0/(R\alpha) = 1.2\ s$.
   Nel frattempo il carrello percorre: $s = v_0t - 1/2at^2 = 3.6\ m$
3. Posso fare $W_d = 1/2Mv_0^2 + 4\cdot 1/2mR^2/2\omega_0^2 = 216\ J$;
   Oppure $W_d = 4\tau_{freno}\theta = 4\tau_{freno}s/R$

4. In questo caso la forza di attrito tra ruote e piano è $\mu_d Mg = Ma$, quindi $a = \mu_d g$ $s' = \frac{v_0^2}{2a} = 9.2\ m$;

Soluzione dell'esercizio 6.14

1. Conservo energia: $mgr - \tau\pi/2 = 1/2 I_{tot}\omega^2$, $I_{tot} = \frac{MR^2}{2} + \frac{3mR^2}{2}$ da cui $\omega = 4.62\ rad/s$
2. Conservo momento angolare rispetto al centro del disco: $I_{tot}\omega = I_{tot}\omega' + m_3 v_3' R$, $v_3' = 1.4\ m/s$;
3. $J = m\omega' r + m_3 v_3' - m\omega r = 1.34\ Ns$.

Soluzione dell'esercizio 6.15

1. $I_{tot} = \frac{mL^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + ML^2$
   Conservo energia: $\frac{I_{tot}\omega^2}{2} = (mL/2 + ML)\, g(1 - \cos\theta)$, da cui $\omega = 3.02\ rad/s$;
2. $\frac{I_{tot}\omega^2}{2} = (mL/2 + ML)\, g(1 - \cos\theta') + \frac{I_{disco}\omega^2}{2}$ da cui $\theta' = 56.5°$
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{tot}}{(m+M)d_{cm}g}} = 2.08\ s$
4. $L_{tot} = L_{asta} + L_{disco} = I_{asta} + LM(L\omega) + I_{disco}\omega_{disco}$, derivo: $\frac{dL}{dt} = (I_{asta} + ML^2)\alpha$, usando il fatto che $\omega_{disco} = cost.$
   Da cui ricavo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{asta}+ML^2}{(m+M)d_{cm}g}} = 1.97\ s$
   In altre termini, il disco contribuisce al momento d'inerzia del pendolo composto solo come un punto materiale all'estremità dell'asta, dato che il disco stesso è libero di ruotare.

Soluzione dell'esercizio 6.16

1. equazione in equilibrio

$$
\begin{aligned}
F_D - F_B &= (m_d + m_a) = 0 \\
\tau - F_D R &= I\alpha = 0
\end{aligned}
$$

   Da cui $F_B = 3\ N$;
2. equazione senza attrito:

$$
\begin{aligned}
F_D &= (m_d + m_a) \\
\tau - F_D R &= \frac{m_d R^2}{2}\frac{a}{R}
\end{aligned}
$$

   Da cui: $a = .375\ m/s^2$
3. Scrivo le equazione della dinamica, con i momenti rispetto al CM dell'asta. Da notare che c'è anche la reazione vincolare del piano su cui è appoggiata una estremità dell'asta.

$$
\begin{aligned}
N_x =& m_a a \\
N_y + N_b =& m_a g \\
N_b L/2 \cos\theta + N_x L/2 \sin\theta =& N_y L/2 \cos\theta
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
N_x =& m_a a \\
N_y =& m_a \left(\frac{g}{2} + \frac{a \tan\theta}{2}\right) = 25.0\ N
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 6.17

1. Chiamo x la distanza del CM dalla ruota anteriore, proiettata sul piano, e quindi $L-x$ e' quella rispetto alla ruota posteriore. Ricavo x pensando la mia motocicletta come due punti materiali, uno sulla ruota posteriore e uno sull'anteriore, con massa pari a $MR_{p/a}$ rispettivamente, e calcolo la posizione del CM. Alternativamente posso calcolare la II eq. cardinale della meccanica rispetto al punto di contatto della ruota posteriore e rispetto a quella anteriore. Trovo $N_a + N_p = Mg$ e $lN_p - Mgx = lMg * R_p - Mgx = 0$ e , da cui ricavo: $x = l(R_p) = l(1 - R_a) = 66.6\ cm$ $a_{max} = g\frac{L-x}{h}\ m/s^2$;
2. La coppia motore si trasmette alla ruota posteriore tramite la trasmissione primaria e quella secondaria (catena), quindi il momento applicato alla ruota posteriore e' pari a $\tau_p = 103 \cdot 2.384 \cdot 45/15$. Quindi l'accelerazione massima che viene applicata alla moto sara' pari a $F = \tau_p/R_p = Ma$, quindi l'accelerazione risulta $a = 8\ m/s^2$ La confronto con il risultato del punto precedente e osservo che: $a < a_{max} = 11.4\ m/s^2$, quindi no, non ce la fa.
3. $N_{A,P} = N^0_{A,P} \pm F\frac{h}{L}$, dove $N^0_{A,P}$ è la reazione della strada con veicolo fermo;
4. $\tau_{max} = F_{max}R = Mg\frac{x}{h}R$

Soluzione dell'esercizio 6.18

1. Uso come coordinate (x, y) del centro di massa dell'asta e l'angolo θ con l'asse verticale. Scrivo la seconda equazione cardinale rispetto al C.M.:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= N_x \\
M\ddot{y} &= N_y - Mg \\
\frac{Ml^2}{12}\ddot{\theta} &= -N_x\frac{l}{2}\cos\theta + N_y\frac{l}{2}\sin\theta
\end{aligned}
$$

Usando: $x = \frac{l}{2}\sin\theta$ e $y = \frac{l}{2}\cos\theta$, e di conseguenza $\ddot{x} = -\frac{l}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 + \frac{l}{2}\cos\theta\ddot{\theta}$ e $\ddot{y} = -\frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{l}{2}\sin\theta\ddot{\theta}$, si ricava:

$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$, ovvero, dato che serve ricavare $\omega = \dot{\theta}$

$$\omega d\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$$

che integrata tra $\theta = [0, \theta]$, porge: $\omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$, quindi $\omega(\theta = \pi/2) = \sqrt{\frac{3g}{l}}$
Si può risolvere anche conservando l'energia:
$Mgy + \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = Mg\frac{l}{2}$
e usando $\dot{x}$, $\dot{y}$ come prima, si ottiene direttamente $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta)$

2. $N_x = -l/2M(\sin\theta\dot{\theta}^2 - \cos\theta\ddot{\theta}) = \frac{3}{2}Mg\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 1\right)\sin\theta$
   $N_x = 0$ per $\theta = 0$
   $N_y = Mg - \frac{Ml}{2}(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}) = Mg\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{3}{4}\sin^2\theta\right)$
   $N_y = Mg$ per $\theta = 0$, $N_y = \frac{Mg}{4}$ per $\theta = \pi/2$
3. $N_x = 0$ quando $\frac{3}{2}\cos\theta - 1 = 0$, quindi $\cos\theta = \frac{2}{3}$

Soluzione dell'esercizio 6.19

1. $\tau_O = -dF + d/2Mg = I_{cubo}\alpha$, quindi Forza minima è: $F > Mg/2 = 66.7\ N$
2. $I_{cubo} = \frac{2}{3}Md^2$; $\alpha = \tau/I_{cubo} = 30.8\ rad/s^2$ (orario)
3. lungo $\hat{x}$: $+F + R_x = \frac{m\alpha}{2}d$, $R_x = -74.9\ N$
   lungo $\hat{y}$: $-Mg + R_y = \frac{m\alpha}{2}d$, $R_y = 158.5\ N$
4. Inizia a cadere quando è inclinato di più di 45°. Il lavoro è: $\mathcal{L}_F = \int \vec{F}d\vec{s} = Fd = 12\ N$
5. conservazione energia: $\frac{1}{2}I_O\omega^2 = \mathcal{L}_F - \frac{Mgd}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$, da cui $\omega = 11.5\ rad/s$

Soluzione dell'esercizio 6.20

1. in coordinate polari, la distanza dall'asse z è $\rho = r\sin\phi$, e l'elemento di volume è $dV = r^2\sin\phi dr d\theta d\phi$, e l'elemento di massa è $dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}dV$. Quindi l'integrale diventa:

$$I_z = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_V \rho^2 dV = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\phi r^2\sin^2\phi r^2\sin\phi = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{5}MR^2$$

2. Se considero un disco di spessore dz ad una quota z, ha un raggio $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, e il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z è:

$$dI_z = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi(R^2 - z^2)dz\cdot(R^2 - z^2)$$

   Integrando tra $[-R, R]$, si ottine

$$I_z = \int_{-R}^{+R} dI_z = \frac{2}{5}MR^2$$

3. Il momento d'inerzia di un guscio sferico di raggio r e spessore dr si può calcolare osservando che deve essere lo stesso per ciascuno dei tre assi cartesiani x, y, z

$$dI_z = \int_V (x^2 + y^2)dm = dI_x = \int_V (z^2 + y^2)dm = dI_y = \int_V (z^2 + x^2)dm$$

, e

$$dI_z = \frac{dI_x + dI_y + dI_z}{3} = \frac{2}{3}\int_V (x^2 + y^2 + z^2)dm = \frac{2}{3}r^2 dm = \frac{2}{3}r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr$$

Integrando tra $[0, R]$, si ottiene

$$I_z = \int_0^R \frac{2}{3}r^2 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr = \frac{2}{3}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}MR^2$$

Soluzione dell'esercizio 6.21

1. Equazioni cardinali, $\hat{x}$ verso il basso, $\hat{u}_\theta$ orario. Assume che $\vec{F}_{att}$ abbia verso opposto a $\hat{x}$ (da discutere una volta risolto il sistema). Per l'equazione dei momenti delle forze posso usare indifferentemente due poli: il CM oppure il punto di contatto tra la sfera e il piano:

$$\begin{aligned} Ma &= Mg\frac{\sqrt{2}}{2} - F && \\ \frac{2}{5}MR^2\alpha &= FR && \text{rispetto a CM sfera} \\ \left(\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right)\alpha &= Mg\frac{\sqrt{2}}{2}R && \text{rispetto a punto di contatto sfera/piano} \\ \alpha &= \frac{a}{R} && \text{moto puro rotolamento} \end{aligned}$$

Si ottiene $F = \frac{\sqrt{2}}{7}Mg = 0.2\ N$ (verso l'alto), $a = \frac{5\sqrt{2}}{14}g = 4.95\ m/s^2$ (da confrontare con $a = \frac{\sqrt{2}}{2}g = 6.93\ m/s^2$ di un corpo che scivola senza rotolare). Da notare che i risultati sono indipendente dal raggio della sfera.
La forza d'attrito è quindi diretta verso l'alto: ci sono diversi modi per convincersene anche intuitivamente.
Per prima cosa, notiamo dal punto successivo che la sfera arriva al piano con una velocità minore di quella che avrebbe se fosse un punto materiale sottoposto alla sola forza di gravità ($v = \sqrt{2gh}$), il che vuol dire che la forza risultante che agisce sul suo CM deve essere minore di quella di gravità, e quindi che la forza d'attrito deve essere diretta in direzione opposta al moto.
Un altro modo è considerare la rotazione della sfera, che è chiaramente oraria. Se considero come polo di rotazione il punto di contatto con il piano inclinato, l'unico momento esterno è quello della forza di gravità, ed ha la direzione giusta per far ruotare la sfera in senso orario. Se viceversa considero come polo di rotazione il CM, l'unico momento esterno è quello della forza di attrito, che deve essere tale da far ruotare la sfera sempre in verso orario: quindi la forza d'attrito deve essere rivolta verso l'alto.

2. $Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{7}{10}Mv^2$, da cui $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 3.35\ m/s$.
3. Quando il piano diventa liscio non ci possono più essere momenti esterni rispetto al CM (l'unica forza è la gravità - con braccio nullo - e la reazione vincolare - pure con braccio nullo -), quindi ω rimane costante.
   Attenzione che il punto di contatto non è un buon polo perchè, data l'assenza di forze di attrito, non abbiamo la garanzia che il moto sia di puro rotolamento, anzi, siamo sicuri che non lo sia. Quindi il punto di contatto non è istantaneamente fermo, e quindi se lo volessimo usare come polo, dovremmo tenere conto del fatto che ha velocità non nulla, e quindi la seconda equazione cardinale avrebbe anche il termine $v_\Omega \times p_{CM} \neq 0$.
   Quindi $\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_{max}$, (la componente rotazionale dell'energia cinetica rimane identica): $h_{max} = 57\ cm$. Minore di quella di partenza perchè parte dell'energia iniziale è presente come energia di rotazione.
4. il sistema è simmetrico, quindi $h'_{max} = h = 80\ cm$.

Soluzione dell'esercizio 6.22

1. La forza di attrito statico non fa lavoro, quindi l'energia si conserva: $\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta^2 x$, $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$ (puro rotolamento), da cui: $\Delta x = v_0\sqrt{\frac{3M}{2k}} = 0.11\ m$.
2. Scelgo in modo arbitrario la direzione della forza di attrito statico, del disco con il piano, verso sinistra, ovvero nella direzione del moto iniziale del disco e opposta alla forza elastica (con molla in compressione). Scelgo inoltre il verso positivo della velocità angolare come antiorario, quindi la condizione di puro rotolamente risulta $v = \omega R$ (con il segno positivo). Il momento della forza d'attrito con questa direzione è quindi negativo.

$$\begin{aligned} Ma &= F_{el} - F_{att} \\ I\alpha &= -RF_{att} \end{aligned}$$

   da cui: $F_{att} = \frac{F_{el}}{3}$, che è massima quando la molla è massimamente compressa $F_{att,max} = 1.5\ N$. Il segno positivo indica che la forza effettiva è veramente diretta verso sinistra, come forse è possibile capire intuitivamente.
3. F_{att} non è una forza impulsiva, quindi p si conserva. $Mv_0 + mv_1 = 0$, $v_1 = v_0\frac{M}{m} = 10\ m/s$
4. Il momento angolare rispetto al centro del disco si conserva durante l'urto. Viene persa solo l'energia cinetica di traslazione $W = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = 2.2\ J$.
5. Dopo l'urto il disco striscia per terra, visto che continua a ruotare: infatti il momento angolare del disco non cambia a seguito dell'urto.
   L'unica forza è quella d'attrito dinamico $F_{att,d} = \mu(M+m)g$, quindi $a = \frac{F_{att,d}}{M+m} = \mu g = 5.9\ m/s$

Soluzione dell'esercizio 6.23

1.
$$\begin{cases} \frac{MR^2}{2}\alpha_A = \tau - \mu M g \frac{R}{2} \\ \frac{MR^2}{2}\alpha_A = +\mu M g \frac{R}{2} \end{cases}$$

da cui ricavo $\alpha_A = 19.5\ rad/s^2$ e $\alpha_B = 9.8\ rad/s^2$.
Visto che i due dischi hanno entrambi un moto uniformemente accelerato, gli angoli percorsi (e quindi i giri) sopo proporzionali alle accelerazione. Quindi $N_B = \frac{\alpha_B}{\alpha_A} N_A = 10\ giri$

2. $t_{N_A} = \sqrt{\frac{N_A 2\pi}{\alpha_A}} = 3.6\ s$; $\omega_A = \alpha_A t_{N_A} = 70.1\ rad/s$, $\omega_B = \alpha_B t_{N_A} = 35.2\ rad/s$
Si potrebbe fare anche con la conservazione dell'energia, usando il fatto che le velocità angolari sono anche loro proporzionali alle accelerazioni, e che il sistema assorbe energia dal lavoro del momento esterno (vedi punto successivo) e ne dissipa per il lavoro delle forze di attrito $W_d = -\mu M g R/2(N_A - N_B)2\pi$.
3. $W = \int \tau d\theta = \tau(N_A)2\pi = 1.11\ kJ$
4. conservo il momento angolare totale rispetto all'asse di rotazione.
$$L_{ini} = \frac{MR^2}{2}\omega_A + \frac{MR^2}{2}\omega_B = \tau t_{N_A} = L_{fin} = 2\frac{MR^2}{2}\omega_f$$
$\omega_f = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} = 52.5\ rad/s$
5.
$$W_d = 2\frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_f^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_A^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega_B^2\right) = 173\ J$$
6. dal punto precedente $W_d = \tau_{att}\Delta\theta_{AB}$, quindi $N_{AB} = \frac{\Delta\theta_{AB}}{2\pi} = \frac{W_d}{\mu M g R/2} = 1.87\ giri$

Soluzione dell'esercizio 6.24

1. $L_O = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0 = I_{tot}\omega_1$
dove $I_{tot} = \left(\frac{MR^2}{2} + \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = \frac{17}{20}MR^2$
$\omega_1 = \frac{2}{17}\omega_0 = 3.7\ rad/s$
2. $E_{diss} = \frac{1}{2}\frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0^2 - \frac{1}{2}I_{tot}\omega_1^2 = 1.74\ J$
3. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{M\omega_1^2\frac{R}{2}}{(M+M)g}\right) = 0.07\ rad$

Soluzione dell'esercizio 6.25

1. Forze esterne sono solo verticali, quindi CM oscilla verticalmente tra $L/2$ e $L/2(1-\cos\theta_0)$;
2. risulta un moto armonico con periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{6g}} = 1\ s$
Partiamo dall'energia totale del sistema, che si conserva, e è la somma di potenziale e cinetica. L'energia potenziale in funzione dell'angolo θ del disegno si può scrivere come:
$$U(\theta) = \frac{mgl}{2}(1-\cos\theta)$$

mentre l'energia cinetica risulta:

$$E_k(\theta) = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

La $v_{cm}^2 = \dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2$, dove $x_{cm}(t) = 0$ è costante, mentre $y_{cm} = \frac{L}{2}\cos\theta$, quindi rimane solo la velocità verticale: $\dot{y}_{cm} = -\frac{L}{2}\sin\theta\dot{\theta}$.
Quindi

$$E_k(\theta) = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia totale si può scrivere come

$$E_{tot}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mgL}{2}(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{4}\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Derivando per il tempo, risulta

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \ddot{\theta}\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right) - \sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - \frac{2g}{L}\cos\theta = 0$$

che è l'equazione del moto nel caso generale (oscillazioni generiche, non piccole), decisamente complessa e impossibile da integrare in modo simbolico.
Invece sviluppando l'energia totale per piccolo oscillazioni attorno a $\theta = 0$ (verticale), risulta l'equazione semplificata per piccole oscillazioni:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\frac{MgL}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

che derivata mi da una eqazione armonica con pulsazione $\omega^2 = \frac{MgL/2}{ML^2/12} = \frac{6g}{L}$, quindi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{6g}} = 1\ s$

3. Dalla conservazione dell'energia, usando l'espressione del punto precedente, si ottiene $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{12g(1-\cos\theta_0)}{L}} = 6.2\ rad/s$
4. Devo bilanciare la forza peso e anche garantire il moto circolare del CM: $N = Mg(7 - 6\cos\theta_0) = 78.5\ N$ diretta verso l'alto.

Soluzione dell'esercizio 6.26

1. Considero i momenti delle forze rispetto al punto di contatto: $\tau_{tot} = F(R - h) - Mg\sqrt{2Rh - h^2} = I\alpha$. Per avere sollevamento deve risultare $\tau > 0$, quindi $F > Mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{(R-h)} = 261\ N$, quindi la risposta è si.
2. uso la conservazione dell'energia: $E_k = 1/2(mr^2/2 + mr^2)\omega^2 = F\sqrt{2Rh - h^2} - mgh$, dove il primo termine è il lavoro della forza esterna. Risulta $\omega = 6.56\ rad/s$ e quindi $v = \omega r = 1.64\ m/s$
3. di nuovo conservazione dell'energia (senza lavoro forza F): $mgh = 1/23/2mr^2\omega'^2$, quindi $\omega' = 4.57\ rad/s$ e $v = \omega' r = 1.14\ m/s$

Soluzione dell'esercizio 6.27

1. Il lavoro del momento esterno è

$$W_{ext} = \int_0^{10\pi} d\theta = 240\pi^2 = 2370\ J$$

. Questo si trasforma in energia cinetica del sistema:

$$E_k = \frac{1}{2} M \frac{L^2}{12} \omega_0^2 + 2 \frac{1}{2} m \frac{L^2}{4} \omega_0^2$$

dato che i dischi non ruotano attorno ai loro assi, ma il loro CM si muove con velocità $v_{cm} = \omega_0 L/2$. Quindi $\omega_0 = 137.7\ rad/s$

2. Il momento angolare totale si conserva, e il disco A ruota attorno al suo CM con la stessa velocità dell'asta.
$L_{ini} = \left(\frac{ML^2}{12} + m\frac{L^2}{4}\right)\omega_0 = L_{fin} = \left[\frac{ML^2}{12} + m\frac{L^2}{4} + \frac{mr^2}{2}\right]\omega_1$, $\omega_1 = 128.5\ rad/s.$

3. di nuovo conservazione momento angolare: nello stato finale il sistema è un corpo rigido.
$L_{ini} = \frac{mr^2}{2}\omega_1 = L_{fin} = \left(\frac{ML^2}{12} + 2(\frac{mr^2}{2} + m\frac{L^2}{4})\right)\omega_2$, $\omega_2 = 8.1\ rad/s$

4. $W_d = \Delta E_k$

5. dopo il distacco, sul disco B non agiscono forze nè momenti, quindi $v_{cm} = \omega_2 L/2 = 4.0\ m/s$ tangenziale e $\omega = \omega_2$

6. Devo supportare il sistema asta+disco A $R_g = (M + m)g$ verso l'alto.
Inoltre il CM del sistema non è più sull'asse di rotazione, e quindi fa un moto circolare e quindi devo fornire una forza centripeta $R_c = (M + m)\omega_2^2 r_{cm}$ dove $r_{cm} = mL/2/(M + m) = 20\ cm.$
Inoltre la forza peso esercita un momento rispetto all'asse perchè il CM è spostato rispetto all'asse. $\tau_g = (M + m)gr_{cm}$ che ruota con il sistema.
La soluzione nella versione precedente era sbagliata! scusate
Infine, il sistema non è più simmetrico, quindi il tensore di inerzia potrebbe non essere piu' diagonale. Se così fosse, allora il momento angolare precederebbe e quindi avrei bisogno di un momento delle forze che precede pure lui.
In questo caso specifico, tuttavia, si può verificare con un conto esplicito che il tensore d'inerzia rimane diagonale, grazie al fatto che il disco si trova sullo stesso piano dell'asta. Si chiamiamo z l'asse verticale, gli elementi fuori diagonale sono $-\Sigma_i m_i x_i(y_i) z_i$, in particolare propozionale a z_i che è la distanza dal piano delle masse m_i (nel nostro caso il disco). Essendo z di tutto il disco nulla, allora questi elementi fuori diagonale sono pari a zero, e quindi il tensore è diagonale.
Se invece il disco fosse sopra o sotto, $z_i \neq 0$ e quindi ci sarebbero elementi non diagonali diversi da zero. In questo caso, visto che $\omega = \omega_2$ lungo l'asse di rotazione (z), il momento angolare, che non è parallelo a ω precede attorno all'asse di rotazione, cioè ha una componente sul piano di rotazione. Quindi avrei bisogno di un momento torcente rotante per garantire il moto di precessione. $\tau_{prec} = dL/dt$
NB. per fornire momenti il supporto dell'asse di rotazione deve essere applicato in due punti, con una distanza non nulla tra di loro (per esempio due cuscinetti uno sopra e uno sotto), in modo da poter generare una coppia di forze uguali e opposte e quindi un momento.

Parte III
Fluidi

7 Fluidi

Esercizio 7.1

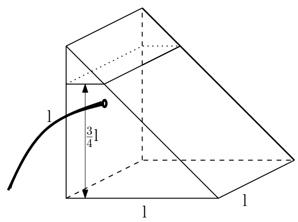
Un rubinetto di sezione $S = 1\ cm^2$ si trova sul fondo di una grande cisterna cilindrica aperta superiormente, e profonda $H = 4\ m$. Il getto dal rubinetto esce verso il basso.

Calcolare, trascurando tutti gli attriti:

1. la velocità di uscita dell'acqua dal rubinetto;
2. la sezione s del getto d'acqua $h = 20\ cm$ sotto il rubinetto.

Esercizio 7.2

Un recipiente a forma di prisma, con base quadrata (lato $l = 20cm$) e superficie laterale a forma di triangolo rettangolo isoscele, appoggiato su una base su un piano orizzontale, è rimpito fino a $\frac{3}{4}$ di acqua ed è aperto superiormente. Al centro della faccia quadrata verticale è praticato un foro con una valvola che fa uscire $Q_v = 0.01\ l/s$: la valvola è inizialmente chiusa.



Calcolare, all'apertura della valvola:

1. la velocità di discesa del livello dell'acqua;
2. la velocità di uscita dell'acqua dal foro;
3. la forza necessaria per tenere fermo il contenitore.

Esercizio 7.3

Un tubicino rigido, di lunghezza l si trova su un piano orizzontale ed è vincolato ad un'estremità attorno alla quale può ruotare senza attriti. Dentro il tubicino scorre acqua che esce dall'estremità libera del tubo con velocità u, perpendicolamente al tubo stesso, da una sezione S, piccola rispetto al tubo. Il tubo è inizialmente in quiete, e il suo momento d'inerzia rispetto al vincolo è I.

1. calcolare l'equazione del moto del tubo.

Esercizio 7.4

Un serbatoio si trova con il pelo dell'acqua a $h = 32$ metri rispetto al suolo, e ha un diametro di $D = 3m$. Esso fornisce acqua ad una casa tramite un tubo di diametro 1" $= 2.54\ cm$, a livello del suolo. La portata del tubo è $Q = 2.5 \cdot 10^{-3} m^3/s$.

Un secondo tubo $d = 1/2$" arriva al secondo piano $h' = 7.2\ m$.

Calcolare, trascurando la viscosità dell'acqua:

1. la pressione del tubo principale se il rubinetto principale della casa è chiuso;
2. idem se è completamente aperto.
3. la velocità di uscita dell'acqua dal secondo tubo;
4. la pressione in questo tubo.

Esercizio 7.5

Un recipiente cilindrico, altezza $h = 0.6\ m$ e raggio $R = 0.3\ m$, è riempito con un liquido di densità $\rho = 1.1\ g/cm^3$, e ruota attorno al suo asse con ω. A riposo è riempito fino all'altezza $h_0 = 0.4\ m$.

Calcolare:

1. ω_{max} perché il liquido non esca dal recipiente;
2. la pressione sul fondo sull'asse di rotazione p_A;
3. la pressione sul fondo sulla parete del recipiente p_R.

Esercizio 7.6

Un condotto orizzontale è formato da una parte tronco conica con alla fine attaccato un tubo cilindrico (inbuto). Dentro scorre acqua $\rho = 1 \cdot 10^3 kg/m^2$ grazie ad una sovrapressione all'ingresso. La sezione del cilindro ha raggio $r_2 = 1\ mm$, l'apertura del cono $r_1 = 2mm$. La pressione all'uscita è $p_3 = 1.025 \cdot 10^5 Pa$, mentre la velocità dell'acqua all'entrata è: $v_1 = 0.1\ m/s$. La viscosità dell'acqua vale $\eta = 1.2 \cdot 10^{-3} kg/(ms)$, e si può trascurare nel tratto conico.

1. la portata del condotto Q;
2. le pressioni all'ingresso p_1 e alla fine del cono p_2.

Esercizio 7.7

Un recipiente contiene una colonna alta $h = 50\ cm$ di liquidi con $\rho = 0.8 \cdot 10^3 kg/m^3$. Alla base c'è un tubicino lungo $l = 1\ m$ con raggio $r = 3\ mm$. Utilizzando v_{media} nel tubo, calcolare:

1. η_{max} perchè il moto sia laminare;
2. la portata del liquido Q se $\eta = \eta_{max}$
3. l'energia dissipata per unità di volume.

Esercizio 7.8

Un tubo di acquedotto è disposto obliquamente con pendenza 1/600, vi scorre acqua in regime laminare sotto gravità. La portata è $Q_v = 4.0 \cdot 10^{-5} m^3/s$.

Calcolare:

1. il diametro del tubo;
2. la velocità media dell'acqua;
3. l'energia persa da un volume $V = 0.15\ m^3$ in $l = 10\ m$.

Esercizio 7.9

Un tubo a U, aperto superiormente, con sezione $s = 1\ cm^2$, si trova su un piano verticale, ed è riempito di acqua per una lunghezza totale di $l = 1\ m$. Viene applicata una pressione in uno dei due rami della U si porta l'altezza della colonna d'acqua $h = 10\ cm$

più in alto rispetto all'equilibrio e all'istante $t = 0s$ tale pressione viene riportata a quella atmosferica.

Calcolare:

1. equazione del moto della massa d'acqua;
2. l'equazione del moto se l'acqua è sottoposta ad una forza di attrito $F = \lambda v$, con $\lambda = 0.6\ kg/s$.

Esercizio 7.10

Un serbatoio è riempito fino ad altezza H da un liquido di densità ρ. Su una parete, ad una altezza h dalla base, si trova un foro di sezione s_0.

Calcolare:

1. la distanza Δx rispetto al piede del serbatoio dove l'acqua arriva a terra;
2. la sezione s' del getto d'acqua quando tocca terra;
3. se esiste una seconda altezza h' per cui l'acqua arrivi alla stessa distanza;
4. l'altezza h" per cui la distanza Δx" è massima.

Esercizio 7.11

Un recipiente è riempito da mercurio ($\rho_{Hg} = 13.6 \cdot 10^3\ kg/m^3$) e acqua ($\rho_{H^2O} = 1.0 \cdot 10^3\ kg/m^3$). Un cubetto di ferro ($\rho_{Fe} = 7.87 \cdot 10^3\ kg/m^3$) di spigolo $l = 6\ cm$ è in equilibrio.

1. Calcolare la posizione del cubetto rispetto all'interfaccia mercurio-acqua.

Esercizio 7.12

Una sferetta di legno, di raggio $r = 2\ mm$ e densità $\rho = 0.7\ g/cm^3$ viene lasciata libera sul fondo di un recipiente pieno d'acqua di altezza $h = 1\ m$, e raggiunge subito una velocità costante.

$\eta_{acqua} = 1.7 \cdot 10^{-3}\ kg/(ms)$, $C_x = .5$

Determinare:

1. il tipo di forza di attrito che subisce nella salita;
2. l'altezza z che raggiunge dopo essere uscito dalla superficie, trascurando effetti di superficie;
3. l'enegia dissipata per attrito durante la salita.

Esercizio 7.13

Una bolla di sapone, di raggio $r_1 = 38.2\ mm$, è collegata ad una cannuccia di diamtero interno $d = 1.08\ mm$ e lunghezza $l = 11.2\ cm$. L'estremità libera della cannuccia è in aria a pressione atmosferica.

Tensione superficiale $\tau_{sapone} = 2.5 \cdot 10^{-1}\ N/m$, viscosità aria: $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}\ Ns/m^2$

1. Calcolare il tempo necessario per ridurre la bolla ad un raggio $r_2 = 21.6\ mm$.

Soluzione dell'esercizio 7.1

1. $p_0 + \rho g H = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$, $v = \sqrt{2gH} = 8.86\ m/s$
2. $\frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho {v_0}^2 = \rho g h$, quindi $v = \sqrt{2gh + v_0^2}$. Portata è costante, $Q = Sv_0 = sv$, quindi $s = \frac{Sv_0}{\sqrt{2gh+v_0^2}} = 0.95\ cm^2$

Soluzione dell'esercizio 7.2

1. $V_{prisma} = lh\frac{(l+(l-h))}{2} = l^2h - \frac{lh^2}{2}$ $\frac{dV}{dt} = \dot{h}(l^2 - lh) = -Q_v$, quindi: $\dot{h} = 1\ mm/s$.
2. $v_{out} = \sqrt{2g(h - \frac{l}{2})} = 1.0\ m/s$
3. $F = \rho Q_v v_{out} = 1 \cdot 10^{-5}\ N$

Soluzione dell'esercizio 7.3

1. il sistema acqua+tubo è isolato (rispetto al piano orizzontale), quindi $L_{tot} = 0 = L_{tubo} + L_{acqua}$ si conserva.
   Considero l'uscita dell'acqua nel tempo dt: $0 = dL_z = Id\omega - (\rho S u dt)v_{acqua}l$: nel sistema del laboratorio: $v_{acqua} = u - \omega l$
   Quindi $\frac{d\omega}{u - l\omega} = \frac{\rho S u l}{I}$, da cui integrando ottengo $\omega(t) = \frac{u}{l}\left(1 - e^{-\frac{\rho S u l^2}{I}t}\right)$
   Da notare che ω tende asintoticamente a $\frac{u}{l}$, quando la velocità dell'acqua che esce dal tubo nel sistema del laboratori sarebbe nulla.

Soluzione dell'esercizio 7.4

1. Sia A il serbatoio, B il tubo da 1" e C quello da 1/2".
   $A \to B$: $p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$,
   con $v_A = v_B \frac{1"^2}{D^2} \ll v_B$
   Quindi $p_B = p_0 + \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_B^2$. $v_B = \frac{Q}{\pi(1"/4)^2} = 4.9\ m/s$
   da cui: $p_B = 4.03 \cdot 10^5 Pa$,
2. se chiuso: $p'_B = 4.15 \cdot 10^5 Pa$
3. $v_C = \frac{Q}{(}\pi\frac{1}{2}"/2)^2 = 19.7\ m/s$
4. $p_C = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g h' = 1.49 \cdot 10^5 Pa$

Soluzione dell'esercizio 7.5

1. L'energia potenziale per unità di massa è $U = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, quindi le superfici equipotenziali sono $z = \frac{1\omega^2 r^2}{2g} + k$. Per calcolare quella di interfaccia con l'aria, si può calcolare il volume del liquido quando il sistema è in rotazione, e equagliarlo a quello a riposo $V = \pi R^2 h_0 = \int_0^R z(r) r 2\pi dr$, da cui si ricava $k = h_0 - \frac{\omega^2 R}{4g}$, quindi l'espressione generale della superfice di interfaccia con l'aria è:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_0 - \frac{\omega^2 R}{4g}$$

   . Quindi $z_{max} = z(r = R) = h_0 + \frac{\omega^2 R}{4g} \le h$

da cui ricavo un $\omega_{max} = \sqrt{\frac{4(h-h_0)g}{R^2}} = 3.34\ rad/s$

2. In generale $\vec{\nabla}p = -\rho\vec{\nabla}U$. Integro lungo un cammino, lungo l'asse, dalla superfice al fondo. $\int_\Gamma \vec{\nabla}p d\vec{l} = \Delta p = p_A - p_{atm} = \int_{Gamma} -\rho\vec{\nabla}U d\vec{l} = -\rho\int_h^0 -g dz = \rho g h$, dove $h = z(r=0) = h_0 - \frac{\omega^2 R}{4g}$

$$p_A = p_{atm} + \rho g\left(h_0 - \frac{\omega^2 R}{4g}\right)$$

3. Posso fare un integrale simile al precedente, ma partendo sulla superficie non sull'asse, ma sul bordo del recipiente, quindi da $h = z(r=R) = h_0 + \frac{\omega^2 R}{4g}$ a 0.

$$p_1 = p_{atm} + \rho g\left(h_0 + \frac{\omega^2 R}{4g}\right)$$

Oppure posso partire da p_0 e spostarmi radialmente fino al bordo, ottenendo, con un diverso integrale, lo stesso risultato.

Soluzione dell'esercizio 7.6

1. $Q = \pi r_1^2 v_1 = 1.257 \cdot 10^{-6}\ m^3/s$
2. Da Hagen-Poiselle, $p_2 = p_3 + \frac{8\eta l v_2}{r_2^2} = 1.0228 \cdot 10^{-5}\ Pa$.

   Da Bernoulli: $p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1\right) = 1.0296 \cdot 10^{-5}\ Pa$

Soluzione dell'esercizio 7.7

1. Pressione alla base: $\Delta p = \rho g h$, $v_m = \frac{\Delta p r^2}{l 8\eta}$, da cui posso calcolarmi il numero di Reynolds R_e, imporre che sia $R_e < 1000$, e ricavarmi $\eta \geq 3.0 \cdot 10^{-3}\ kg/ms$
2. $Q_v = v_m \pi r^2 = \frac{\Delta p \pi r^4}{l 8\eta} = 4.12 \cdot 10^{-5}\ m^3/s = 41.2\ ml/s$, $v_m = 1.46\ m/s$
3. senza tubo: $v_{out} = \sqrt{2gh} = 3.13\ m/s$
   quindi $W_d/V = \frac{1}{2v}\rho\left(v_m^2 - v_{out}^2\right) = 3.0 \cdot 10^{-3}\ J/m^3$

Soluzione dell'esercizio 7.8

1. Forza diretta verso la discesa è $F = SLg\frac{h}{L} = S\rho g h = S\Delta p$, da cui $\Delta p = \rho g h$

   Uso H-P: $r = \sqrt[4]{\frac{8\eta}{\pi\rho g\theta}} = 0.11\ m$
2. $v_m = \frac{Q}{\pi r^2} = 1.1 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$
3. $\Delta E = Mgh = \rho v g L\theta = 24\ J$
   NB: $R_e = 126$, quindi moto è effettivamente laminare.

Soluzione dell'esercizio 7.9

1. è un moto armonico $x(t) = h\sin\omega t$, con $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 4.43\ rad/s$
2. è un moto armonico smorzato $x(t) = e^{-3t} 0.136\sin(3.26t + 0.827)$

Soluzione dell'esercizio 7.10

1. $\Delta x = 2\sqrt{h(H-h)}$
2.
3. soluzione simmetrica se scambio $h' = H - h$
4. Δx è massimo se $h = H/2$

Soluzione dell'esercizio 7.11

1. Si dimostra che Bernoulli funziona anche per due liquidi.
   La forza sul blocchetto è: $F = l^2 g\left(\rho_{Hg}x + \rho_{H^2O}(l-x)\right) - l^2 g\rho_{Fe}$ da cui si ricava $x = 3.2\ cm$.

Soluzione dell'esercizio 7.12

1. Se valesse la legge di Stokes, $v_{regime} = \frac{2r^2(\rho_0-\rho_L)g}{9\eta} = 1.54\ m/s$ che fornisce un numero di Reynolds $R_e = 1\cdot 10^3 \gg 0.6$, quindi non posso usarla.
   La forza di attrito è quindi $F = -\frac{1}{2}C_x\rho_0\pi()r^2v^2$ che fornisce una velocità di regime: $v_{regime} = 0.177\ m/s$
2. $h = \frac{v^2}{2g} = 1.6\ mm$
3. la posso calcolare come $W_d = F_{att}h$ oppure come $W_d = V_{sferetta}g(\rho_O - \rho_L)h - \frac{1}{2}m_{sferetta}v^2$
   $W_d = 9.8\cdot 10^{-5}\ J$

Soluzione dell'esercizio 7.13

1.

Parte IV
Termodinamica

8 Calorimetria

Esercizio 8.1

Una massa d'acqua $m_a = 120\ g$, $T_a = 21°$C, è posta in contatto con una massa di rame $m_{cu} = 75\ g$, $T_{cu} = 89°$C. Il calore specifico dell'acqua è $C_a = 1\ cal/g°$C, quello del rame $C_{cu} = 0.093\ cal/g°$C.

1. Calcolare la temperatura all'equilibrio.

Esercizio 8.2

Una massa d'acqua $m_a = 140\ g$ si trova a $T_a = 21$ °C ($C_a = 1\ cal/g°$C) ed è in contatto con del ghiaccio, a $T_g = -5°$C ($C_g = 0.5\ cal/g°$C, $\lambda_f = 79\ cal/g$). La temperatura all'equilibrio è $T_e = 4°$C

1. calcolare la massa del ghiaccio m_g.

Esercizio 8.3

Dentro un contenitore si trova acqua $m_a = 127.698\ g$ e una massa di rame $m_r = 57.652\ g$ ($C_r = 0.093\ cal/g°$C) in equilibrio a $T_a = 21.9°$C. Viene introdotta una terza sostanza $m_x = 58.991\ g$ a $T_x = 94.5$ °C. La temperatura del sistema è misurata da un termometro con una capacità termica $K = 2.2\ cal/°$C, che, all'equilibrio, misura $T_f = 25.6$ °C

1. Determinare il calore specifico di x.

Esercizio 8.4

Un recipiente contiene acqua, rame, ghiaccio e un termometro. Il ghiaccio si scioglie.
$m_r = 57.650\ g$, $C_r = 0.093\ ca/g°$C, $m_a = 108.830\ g$ $C_a = 1 cal/g°$C, $m_g = 9.920\ g$ $T_g = 0°$C, $k_{termometro} = 2.2\ cal/°$C, $T_0 = 19.4°$C, $T_f = 11.8$ °C

1. Calcolare il calore di fusione specifico del ghiaccio λ_g.

Esercizio 8.5 *(M.S.V. 9.9)*

Un recipiente rigido e isolato termicamente contiene $n = 2$ moli di ossigeno O_2 ad una pressione $p_0 = 1\ bar$, $T_0 = 300\ K$. Nel recipiente viene introdotto un blocco di rame (di volume trascurabile) con $m = 0.1\ kg$ e $T_1 = 800\ K$, $C_{rame} = 387\ J/kgK$ e si attende l'equilibrio.

1. calcolare la pressione finale del gas.

Esercizio 8.6 *(M.S.V. 9.10)*

Un cilindro chiuso da un pistone scorrevole (senza attriti) contiene $n = 1$ moli di acqua allo stato di vapore, $T_1 = 373\ K$, $p = 0.2\ bar$. Il pistone viene spinto lentamente fino a che $V_2 = 0.02\ m^3$, mantenendo costante la temperatura.

1. Calcolare la massa di vapore acqueo che condensa.

Esercizio 8.7 *(M.S.V. 9.16)*

Cilindro adiabatico $r = 0.1\ m$ è chiuso da pistone di massa $M = 5\ kg$, collegato al fondo da una molla (massa e vol trascurabile) $l_0 = 0.1\ m$ $k = 2 \cdot 10^3\ N/m$, e contiene $n = 0.6\ moli$ di gas ideale. All'esterno agisce una pressione $p_0 = 1\ bar$ e si trova all'equilibrio $l = 0.5\ m$ dal fondo.

1. Temperatura del gas

Esercizio 8.8 *(M.S.V. 9.5)*

Un proiettile di piombo ($c_{Pb} = 130\ J/kgK$) $m = 10\ g$ si conficca ad una velocità di $v_0 = 200\ m/s$ su un blocco di alluminio ($c_{Al} = 896\ J/kgK$) di massa $M = 100\ g$ inizialmente fermo e ci rimane incastrato. Entrambi sono inizialmente a $T_0 = 300\ K$.

1. Trascurando il calore scambiato con l'esterno, calcolare la temperatura del sistema.

Esercizio 8.9

Un cilindro di diametro interno $d = 4.0\ cm$ contiene aria compressa da pistone di massa $m = 13.0\ kg$, ed è libero di moversi senza attriti. Tutto è immerso in un bagno d'acqua la cui temperatura è controllabile.

Inizialmente $T = 20°$C e $h_1 = 4.0\ cm$. Poi la temperatura viene portata lentamente a $T_f = 100°$C

1. calcolare h_2.

Soluzione dell'esercizio 8.1

1. $\Delta Q_{A\to Cu} = -\Delta Q_{Cu\to A}$, $T_{eq} = \frac{m_A C_A T_A + m_{Cu} C_{Cu} T_{Cu}}{m_A C_A + m_{Cu} C_{Cu}} = 298.38\ K$

Soluzione dell'esercizio 8.2

1. $m_a C_a (T_a - T_F) = m_g C_g (T_0 - T_g) + m_g \lambda_g + m_g C_A (T_e - T_0)$, da cui $m_g = 27.84\ g$

Soluzione dell'esercizio 8.3

1. $m_x C_x (T_1 - T_F) = (m_R C_R + m_a C_a + K)(T_F - T_0)$, da cui $C_x = 0.123\ cal/g°\mathrm{C}$

Soluzione dell'esercizio 8.4

1. $m_g \lambda_g + m_g C_a (T_F - T_i) = (m_R C_R + m_a C_a + K)(T_0 - T_F)$, da cui $\lambda_F = 77.4\ cal/g$

Soluzione dell'esercizio 8.5

1. $T_F = \frac{m_1 c_1 T_1 + n c_V T_0}{m_1 C_1 + n c_V} = 541.2\ K$, trasformazione isocora, $p_F = p_0 \frac{T_F}{T_0} = 1.8\ bar$

Soluzione dell'esercizio 8.6

1. Inzialmente si ha solo vapore acqueo, con volume $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 0.15\ m^3$.
   Quando la pressione è qualla di vapore saturo (1.013 bar), il volume è $V_2' = \frac{nRT_1}{p_2} = 0.03\ m^3$ che è maggiore di V_2, quindi parte del vapore condensa.
   Sia x il numero di moli di acqua che condensa.
   $V_2 = V_{liq} + V_{vapore} = \frac{xA}{\rho} + \frac{(1-x)RT_1}{p_{v.s.}}$, ricavo $x = 0.35\ moli$, quindi massa $m_{liq} = xA = 6.3 \cdot 10^{-3}\ kg$

Soluzione dell'esercizio 8.7

1. $T_{gas} = 400\ K$

Soluzione dell'esercizio 8.8

1.

Soluzione dell'esercizio 8.9

1. $p = p_{atm} + \frac{4mg}{\pi d^2}$ è costante.
   $h_2 = h_1 \frac{T_2}{T_1} = 5.1\ cm$

9 Termodinamica: I principio

Esercizio 9.1

Un recipiente adiabatico contiene aria (gas ideale) a $T = 280\ K$, ed è chiuso in alto da un pistone con massa $M = 5\ kg$; il volume iniziale del gas è $V_{gas} = 0.05\ m^3$ e la sezione del recipiente è pari a: $S = 100\ cm^2$.

1. n_{gas}

Viene introdotto un blocco di rame di $M_{rame} = 1\ kg$, $T' = 370\ K$ e si attende l'equilibrio: il movimento del pistone è molto lento. Il calore specifico del rame è: $C_{rame} = 384\ J/kgK$.

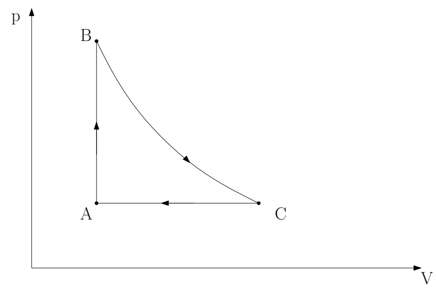
2. T_{eq}
3. Δh del pistone.

Esercizio 9.2

Un cilindro con pistone libero di muoversi senza attriti contiene 0.1 moli di aria (considerato gas ideale), $T = 20°C$. Il pistone viene compresso lentamente, tanto che l'aria rimane in equilibrio termico con l'ambiente, fino a dimezzare il volume iniziale.

1. Calcolare il lavoro compiuto dall'aria durante la compressione.

Esercizio 9.3



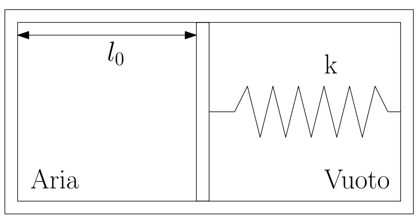
Una quantità di elio (gas ideale) pari a $n = 10^3\ moli$ subisce il ciclo in figura, dove BC è una isoterma. Tutte le trasformazioni sono reversibili. $p_A = 1.00\ atm$, $V_A = 22.4\ m^3$, $p_B = 2.00\ atm$.

Calcolare:

1. T_A, T_B, V_C;
2. Il lavoro svolto dal sistema in ogni trasformazione e per l'intero ciclo;
3. Il calore scambiato dal sistema in ogni trasformazione e per l'intero ciclo;
4. il rendimento del ciclo

Esercizio 9.4

Un cilindro rigido e adiabatico di sezione $S = 1.5 \cdot 10^{-3}\ m^2$ è diviso in due da un pistone a tenuta, adiabatico, libero di muoversi senza attrito. In uno scomparto c'è aria, dall'altra parte c'è il vuoto e una molla $k = 10^4\ N/m$ con estremità fissata al pistone e l'altra al fondo del cilindro, inizialmente a riposo.



Il compartimento del gas è lungo $l_0 = 30\ cm$. Il gas è inizialmente a $p_0 = 1\ atm$ e $T_0 = 27°$C. Si sblocca il pistone e il sistema raggiunge il nuovo stato di equilibrio.

Calcolare:

1. lunghezza finale del cilindro;
2. pressione e temperatura finale del gas.

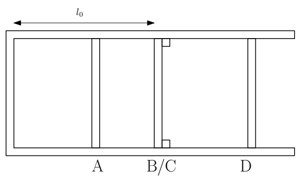
Esercizio 9.5

Un gasometro con p_0 e T_0 costanti è collegato ad un contenitore rigido, adiabatico inizialmente vuoto. Si apre il rubinetto e elio entro il contenitore fino a raggiungere la pressione p_0.

1. calcolare la temperatura finale del contenitore.

Esercizio 9.6

Un cilindro rigido e adiabatico, di raggio $r = 10\ cm$ è chiuso da uno stantuffo libero di scorrere fino a $l_0 = 1.42\ m$, dove c'è un blocco. Inizialmente il cilindro contiene 1 mole di elio a $T = 0°$C lo stantuffo è esposto (a destra) all'atmosfera (stato A).



Si riscalda lentamente la base del cilindro in modo che lo stantuffo si sposti, bloccandosi a l_0 (stato B) e raggiunga la pressione finale pari a 1.1 p_{atm} (stato C).

Infine il pistone si sblocca e si riporta il gas alla pressione iniziale (stato D) con una trasformazione isoterma reversibile.

Calcolare:

1. V_A, T_B, T_C, V_D;
2. lavoro fatto nelle tre trasformazioni
3. calore scambiato nelle tre trasformazioni.

Esercizio 9.7

Un compressore, che lavora ciclicamente e reversibilmente, fornisce $m = 50\ kg$ di aria compressa ogni ora, prendendola da un ambiente in cui $p = 1\ atm$ e $T = 280\ K$.

Calcolare la potenza del compressore nei casi seguenti:

1. compressione adiabatica, sapendeo che $p_{out} = 10\ atm$;
2. compressione dove l'aria compressa ha temperatura $T_2 = 460\ K$ e la perdita di calore nel compressore è $Q_2 = 210\ J/s$. Considero l'aria un gas ideale con $C_V = 710\ J/kgK$ (calore specifico) e $\gamma = 1.4$

Esercizio 9.8

Un recipiente rigido, con pistone bloccato, contiene una bombola di $4l$, che occupa 2/3 del volume disponibile, e che è piena di Azoto (N_2) a $T_A = 300K$ e $p_0 = 1.3\ atm$ (A). La bombola si apre e il gas riempie rapidamente il recipiente (B). Raffreddo il recipiente, sempre con pistone bloccato, fino a raggiungere una pressione p_C (C), tale che sia possibile riportare il gas, muovendo il pistone, tramite una trasformazione adiabatica reversibile, allo stato A.

Calcolare:

1. ΔU_{A-B};
2. p_C;
3. ΔU, Q e $\mathcal{L}$ scambiati in $B \to C$ e $C \to A$

Esercizio 9.9

Una mole di gas ideale biatomico compie un ciclo reversibile, formato da una trasformazione adiabatica AB, una isoterma CD, e due isocore BC e DA.

$V_A = 20\ l$, $V_B = 30\ l$, $T_A = 350\ K$, $T_C = 325\ K$.

Calcolare:

1. $p_{A,B,C,D}$
2. $Q_{AB,BC,CD,DA}$
3. η del ciclo;
4. la temperatura T'_C che dovrebbe avere lo stato C perchè il lavoro totale del ciclio sia nullo.

Esercizio 9.10

Un recipiente cilindrico di alluminio $\rho = 2.7\ g/cm^3$, $V = 5.67 \cdot 10^{-3}\ m^3$, $r = 10\ cm$ contiene $n = 0.8$ moli di aria $T_0 = 250\ K$. Viene ceduto calore da un fornello a gas, con temperatura $T_{fuoco} = 600\ K$. Il tappo, di spessore $s = 1\ mm$, tiene fino a $p = 6\ atm$. Quando cede, si stacca in $\Delta t = 0.01\ s$.

1. temperatura massima dell'aria;
2. calore ceduto all'aria;
3. v del coperchio.

Soluzione dell'esercizio 9.1

1. $n = \left(p_{atm} + \frac{Mg}{S}\right)\frac{V}{RT} = 2.3\ moli$
2. Il calore ceduto dal rame è pari a quello assorbito dall'aria, cambiato di segno. La trasformazione dell'aria e' isobara:

$$\Delta Q_{Cu} = M_{rame}C_{rame}(T' - T") = -nc_P(T" - T)$$

,
da cui ricavo: $T" = 356.6\ K$.
In alternativa posso usare il I principio della termodinamica scrivere:

$$\Delta Q - \mathcal{L} = mc(T' - T") - p(V" - V) = \Delta U = nc_V(T" - T)$$
$$pV" = nRT"$$

Da cui ricavo: $T" = 356.6\ K$
Di fatto e' la stessa soluzione, ma la seconda e' piu' complessa. In generale posso scrivere $\Delta Q_{aria} - \mathcal{L}_{aria} = \Delta U$, ovvero: $\Delta Q_{aria} = -\Delta Q_{rame} = nc_V\Delta T + \int pdV = nc_V\Delta T + p\Delta V$, usando il fatto che la trasformazione e' isobara. Infine posso usare l'eq di stato dei gas ideali per l'aria, e, sempre usando che $p = cost$, $p\Delta V = nR\Delta T$, quindi $-\Delta Q_{rame} = n(c_V + R)\Delta T = nc_P\Delta T$, esattamente come prima.
3. $V" = V\frac{T"}{T}$, e $\Delta h = \frac{V"-V}{S} = 1.7\ m$

Soluzione dell'esercizio 9.2

1. la trasformazione è reversibile: $\mathcal{L} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = -169\ J$.

Soluzione dell'esercizio 9.3

1. $T_A = \frac{p_AV_A}{nR} = 273\ K$
$T_B = T_A\frac{p_B}{p_A} = 546\ K$
$V_C = V_A\frac{T_B}{T_A} = 44.8\ m^3$
2. $\mathcal{L}_{AB} = 0\ J$, $\mathcal{L}_{BC} = nRT_B\ln\frac{V_A}{V_B} = 3.15\cdot 10^6\ J$, $\mathcal{L}_{CA} = p_A(V_A - V_C) = -2.26\cdot 10^6\ J$
$\mathcal{L}_{ciclo} = 8.8\cdot 10^5\ J$
3. $\Delta Q_{AB} = nc_v(T_B - T_A) = \Delta Q_{BC} = \mathcal{L}_{BC} = 3.15\cdot 10^6\ J$ $\Delta Q_{CA} = nc_p(T_A - T_A) = -5.67\cdot 10^6\ J$

Soluzione dell'esercizio 9.4

1. $n = \frac{p_0V_0}{RT_0} = 0.0183\ moli$
stato finale:

$$p_1(l_0 + x)S = nRT1$$
$$p_1S = kx$$
$$\Delta Q - \mathcal{L} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = nc_V(T_1 - T_0)$$

da cui ricavo $x_1 = 0.014\ m$, e $x_2 = -0.26\ m$. Scarto la seconda perchè avevo fatto l'ipotesi che il gas si espandeva per calcolare il lavoro, quidni risulta $l_1 = 31.4\ cm$

2. $p = \frac{kx}{S} = .95 \cdot 10^5\ Pa$, e $T = \frac{p(l+x)S}{nR} = 298\ K$. La temperatura finale si puo' calcolare anche con il I principio $-\mathcal{L} = -1/2kx^2 = nc_v\Delta T$ da cui ricavo $\Delta T = -2°\mathrm{C}$

Soluzione dell'esercizio 9.5

1. Stato iniziale. Gasometro: $p_0V_0 = n_0RT_0$
   Stato finale. Gasometro: $p_0V_1 = (n_0 - n_2)RT_0$, bombola: $p_oV_2 = n_2RT_2$
   $-\mathcal{L} = -p(V_1 - V_0) = \Delta U = n_2c_V(T_2 - T_0)$, da cui $T_2 = \gamma T_0$

Soluzione dell'esercizio 9.6

1. $V_A = 22.4\ l$ (gas STP). $l_a = \frac{V_A}{\pi r^2} = 0.71\ m$. $T_B = T_A\frac{V_B}{V_A} = 546\ K$, $T_C = \frac{p_CV_B}{nR} = \frac{p_CT_B}{p_B} = 600\ K$, $V_D = V_Cp_C/p_D = 1.1V_C = 49.3\ l$
2. $W_{AB} == p\Delta V + 0 = 2.26 \cdot 10^3\ J$ $W_{BC} = 0$, $W_{CD} = \Delta Q_{CD} = 4.77\ J$ $W_{tot} = 7.0 \cdot 10^3 J$
3. $\Delta Q = \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{BC} + \Delta Q_{CD} = nc_p(T_B - T_A) + nc_V(T_C - T_B) + nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = 5.67 \cdot 10^3 + 0.68 \cdot 10^3 + 4.77 \cdot 10^3 = 11..1 \cdot 10^3\ J$

Soluzione dell'esercizio 9.7

1. Compressione adiabatica: $T_1 = T_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 540.6\ K$.
   $\mathcal{L} = -mC_v(T_1 - T_0)$, quindi $P = \frac{\mathcal{L}}{dt} = -\frac{dm}{dt}C_v(T_1 - T_0) = -2590\ W$
2. $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt}Q - \Delta U = -\frac{dQ_2}{dt} - \frac{dm}{dt}C_V(T_{aria} - T_0) = -1995\ W$
   In entrambi i casi la potenza del compressore è l'opposto di quella ceduta dal gas.

Soluzione dell'esercizio 9.8

1. $\Delta U_{AB} = 0$ (espansione libera)
2. $p_C = p_A\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^\gamma = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = 0.737\ atm$
3. $C \to A$ adiabatica reversibile. $\Delta Q = 0$, $\mathcal{L} = -\Delta U = nc_V\Delta T$
   $B \to C$, $\mathcal{L} = 0$, $\Delta Q = \Delta U = nc_V\Delta T$

Soluzione dell'esercizio 9.9

1. A: uso eq. gas perfetti. $p = 1.45 \cdot 10^5\ Pa$, $T = 350\ K$;

   B: trasfromazione isoterma $A \to B$. $p = 0.82 \cdot 10^5\ Pa$, $T = 296\ K$;

   C: uso eq. gas perfetti. $p = 0.9 \cdot 10^5\ Pa$, $T = 325\ K$;

   D: trasfromazione isocora $D \to B$. $p = 1.35 \cdot 10^5\ Pa$, $T = 325\ K$;
2. AB adiabatica $\Delta Q = 0$;

   BC $\Delta Q = nc_V\Delta T_{BC} = 602.5\ J$;

CD $\Delta Q = \mathcal{L} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = -1095\ J$;

DA $\Delta Q = nc_V \Delta T_{DA} = 519.0\ J$;

3. $\eta = \frac{|Q_{ass}|-|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 0.024$
4. La macchina compie lavoro solo tra $A \to B$ e tra $C \to D$. $\mathcal{L} = nc_V(T_B - T_A) - nRT'_C \ln \frac{V_C}{V_D} = 0$, quindi $T'_C = 333\ K$

Soluzione dell'esercizio 9.10

1. Al momento della rottura, lo stato temodinamico del sistema è noto, quindi basta usare l'equazione dei gas perfetti in queste cnodizioni.

$$T_{max} = \frac{p_{max}V}{nr} = 518\ K$$

2. la trasformazione è isocora. Il calore assorbito è $Q = nc_V(T_{max} - T_0) = 4.5\ kJ$, considerando $c_V = 5/2R$ (gas ideale biatomico).
3. durante Δt agisce una forza $F = (p_{max} - p_{atm})\pi r^2 = 15.7\ kN$. Quindi viene generato un impulso $J = F\Delta t = 157\ Ns$. La massa del tappo di alluminio è $m = \rho_{Al} s\pi r^2 = 85\ g$, quindi la sua velocità risulta $v = \frac{F\Delta t}{m} = 1.85 \cdot 10^3\ m/s$.
Il raggio del cilindro non è necessario, visto che la sezione appare sia al numeratore (F) che al denominatore (m). La temperatura del fuoco serve solo a verificare che l'esplosione del tappo effettivamente avviene.

10 Termodinamica: II principio

Esercizio 10.1

Un calorimetro contiene 1 kg di acqua, agitata da palette collegate ad un motore che fornisce potenza $P = 20\ W$. Si aggiunge al calorimetro 10 moli di potassio solido a $T_0 = 323\ K$. Dopo $\Delta t = 5\ min$, il solido e l'acqua sono in equilibrio termico. Il calore scambiato tra il solido e l'acqua è $Q_1 = 13.4 \cdot 10^3\ J$; il calore trasferito dall'acqua all'ambiente è $Q_2 = 600\ J$.

Calcolare:

1. ΔU dell'acqua

Sapendo che il calore molare del solido è $c_p = a + bT[K]$ dove $a = 1.3\ cal/mole$ e $b = 19.4 \cdot 10^{-3}\ cal/moleK$, calcolare:

2. la temperatura finale del solido;
3. la variazione di entropia del solido.

Esercizio 10.2

Due masse uguali di acqua $m = 100\ g$ sono inizialmente a temperatura $T_1 = 300K$ e $T_2 = 275K$. Vengono a contatto e arrivano all'equilibrio termico.

Calcolare, supponendo che siano contenute in recipiente adiabatico:

1. la temperatura di equilibrio;
2. la variazione di entropia;

Supponendo che la trasformazione sia reversibile, calcolare:

3. T'_{eq}
4. $\mathcal{L}$ fatto dal sistema

Esercizio 10.3

Un blocco di stagno, di massa $m = 1.5\ kg$, si trova a temperatura ambiente $T_0 = 290\ K$, e viene messo a contatto con una sorgente a temperatura di fusione dello stagno $T_F = 505\ K$ (un saldatore). Il calore specifico dello stagno è $C_F = 218.6\ J/kgK$ e il calore di fusione sia λ_F.

1. Calcolare la variazione di entropia dell'universo ΔS_u

Esercizio 10.4

Un recipiente con pareti adiabatiche è diviso in due parti (A e B) da una membrana anch'essa adiabatica. Lo stesso gas biatomico ideale si trova nei due scomparti: $n_A = 2\ moli$, $T_A = 300\ K$, $V_A = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$, $n_B = 3\ moli$, $T_B = 800\ K$, $V_B = 4 \cdot 10^{-3}\ m^3$. Si considerino due casi:

1. la membrana viene sostituita con una conduttrice di calore, si attende l'equilibrio termico e quindi viene tolta.

2. la membrana viene tolta e il gas si mescola fino a raggiungere l'equilibrio.

Calcolare, nei due casi:

1. T_{eq}
2. ΔS_{gas}
3. $\Delta S_{universo}$

Esercizio 10.5

Due moli di gas ideale biatomico si trovano ad una temperatura $T_0 = 300\ K$, $p_0 = 1 \cdot 10^5\ Pa$, e subiscono una compressione adiabatica e reversibile fino a riempire un recipiente di volume $V_0' = 1 \cdot 10^{-2}\ m^3$.

Successivamente il gas torna alla temperatura iniziale a causa di un isolamento non perfetto del contenitore. Calcolare:

1. p_{max}
2. T_{max}
3. p_{gas} finale
4. $\mathcal{L}$ durante la compressione
5. ΔS_{gas}
6. $\Delta S_{universo}$

Esercizio 10.6

Una quantità di ghiaccio $m = 50\ kg$ si trova ad una temperatura $T_0 = -5°\text{C}$ in un congelatore. Il congelatore è in una stanza con temperatura $T_1 = 30°\text{C}$, e le pareti del congelatore perdono $\frac{dQ}{dt} = 120\ cal/s$.

Considerando il congelatore una macchina reversibile, calcolare:

1. Potenza P per mantenere costante la temperatura del ghiaccio;
2. ΔS_u in 1 ora;
3. la quantità di ghiaccio che fonde se il congelatore resta spento per mezz'ora ($C_G = 2090\ J/kgK$, $\lambda_G = 333.5\ kJ/kg$);
4. ΔS_u in quella mezz'ora

Esercizio 10.7

Un gas ideale biatomico si trova in equilibrio con l'ambiente ($p_0 = 10^5\ Pa$, $T_0 = 300\ K$) in un cilindro adiabatico di volume $V_0 = 5\ l$, dotato di un pistone pure adiabatico che scorre senza attrito. Il cilindro è diviso in due parti da una membrana diatermica con un piccolo foro, che all'inizio è a contatto con il pistone mobile.

Una resistenza fornisce al gas un lavoro W in modo tale da raddoppiarne la pressione (a pistone bloccato).

Successivamente il pistone viene lasciato libero di muoversi fino a che il sistema raggiunge l'equilibrio termico. Calcolare:

1. ΔU_{gas}
2. ΔS_{gas}
3. $\Delta U_{ambiente}$
4. $\Delta S_{ambiente}$

Esercizio 10.8

Un gas perfetto monoatomico compie un ciclo formato da

$1 \to 2$ adiabatica reversibile;

$2 \to 3$ isobara a contatto con sorgente a temperatura T_3

$3 \to 4$ adiabatica reversibile

$4 \to 1$ isobara a contatto con sorgente a temperatura T_1

Sono noti: $V_1 = 3.5\ l$, $p_1 = 2.5\ atm$, $p_2 = 3.5\ atm$, $V_3 = 4.5\ l$, e la variazione di entropia dell'universo per ogni ciclo $\Delta S = 2.1\ J/K$. Calcolare:

1. $Q_{2\to 3}$;
2. $Q_{4\to 1}$;
3. il rendimento del ciclo η;
4. le temperature nei 4 stati T_i.

Esercizio 10.9

Una macchina termica ciclica reversibile può lavorare con tre sorgenti di calore, ad una temperatura $T_1 = 400\ K$, $T_2 = 300\ K$, e $T_3 = 200\ K$. Prima lavora con T_1 e T_2 e successivamente con T_1 e T_3.

Il calore totale assorbito dalla sorgente T_1 è $Q_1^{ass} = 1200\ J$, mentre il lavoro totale fornito è $\mathcal{L} = 400\ J$.

Calcalare:

1. il calore scabiato Q_2 e Q_3 con le sorgenti T_2 e T_3;
2. ΔS delle sorgenti;
3. ΔS dell'universo.

Esercizio 10.10

Un contenitore adiabatico è formato da due comparti: il primo, A, che è chiuso da un pistone pure adiabatico che scorre senza attrito, e il secondo B, separato da A da una membrana rigida buona conduttrice di calore.

Il comparto A contiene $n_A = 1$ moli di gas biatomico, ad una tempartura $T_A = 300\ K$ e pressione $p_A = 1\ atm$, mentre B contiene $n_B = 2$ moli di gas monoatomico ad una temperatura $T_B = 600\ K$. Il sistema si porta all'equilibrio.

Calcolare:

1. $T_{equilibrio}$
2. ΔV_A
3. $\mathcal{L}$
4. ΔS_A e ΔS_B

Esercizio 10.11

Un contenitore è diviso in due parti (A e B) da una membrana diatermica con un rubinetto, inizialmente aperto. Il comparto B è chiuso da un pistone mobile, mentre il comparto A ($V_A = 10\ l$) può essere messo in contatto con l'ambiente (T_0, p_0).

Inizialmente il gas, ideale biatomico, $n = 1$ moli e' in equilibrio con l'ambiente $T_0 = 300\ K$.

Il sistema è soggetto ad una compressione adiabatica reversibile grazie al pistone, fino a che il comparto B risulta vuoto. Successivamente il rubinetto viene chiuso e si attende l'equilibrio termico con l'ambiente esterno. Calcolare:

1. Q scambiato con l'ambiente

Considerando che il rubinetto perde leggermente, calcolare:

2. $\mathcal{L}_{gas}$
3. ΔS del gas e dell'ambiente.

Esercizio 10.12

Una macchina termica lavora tra una sorgente a temperatura $T_0 = 273\ K$, formata da acqua e ghiaccio in fusione ($\lambda_F = 80\ cal/g$) e una a $T_1 = 300\ K$. In ogni ciclo il lavoro fornito dalla macchina risulta $\mathcal{L} = 2000 J$ e $\Delta S_{universo} = 4\ J/K$.

Calcolare:

1. quanto ghiaccio fonde per ogni ciclo della macchina;
2. il rendimento della macchina;
3. il lavoro che sarebbe fornito dalla macchina se essa fosse reversibile e fondesse, per ogni ciclo, la stessa quantità di ghiaccio di prima.

Esercizio 10.13

Un contenitore adiabatico ha la base a contatto termico con l'esterno e contiene $n = 1$ moli di gas in condizione STP ($p = 1\ atm$, $T = 300\ K$). Il gas compie le seguenti trasformazioni:

AB espansione isobara con $T_B = 400\ K$;

BC espansione isoterma reversibile fino a $V_C = 40\ l$;

CD isocora in contatto termico con $T_D = 217\ K$;

DA compressione adiabatica reversibile.

Calcolare:

1. $\mathcal{L}_{AB}$;
2. se il gas è monoatomico o biatomico;
3. ΔS_{gas}^{AB+CD};
4. $\Delta S_{universo}^{ciclo}$;

Esercizio 10.14

Due moli di gas monoatomico si trovano in uno stato di equilibrio A con $V_A = 40\ l$, $T_A = 300\ K$. Partendo da questo stato il gas compie un ciclo termodinamico composta da quattro trasformazioni reversibili:
AB compressione adiabatica con lavoro $W_{AB} = -5\ kJ$;
BC espansione isobara con calore assorbito $Q_{BC} = 15\ kJ$
CD espansione isoterma; **DA** isocora. Determinare:

1. temperatura e pressione in B;
2. temperatura in C e lavoro W_{BC};
3. rendimento η del ciclo.

Si immagini che **CD** sia una espansione libera. Calcolare:

4. rendimento η' del ciclo;
5. ΔS_u nel ciclo.

Esercizio 10.15

Un cilindro chiuso, a pareti adiabatiche, ha nel suo interno un pistone adiabatico, che puó scorrere senza attrito nel cilindro. In ciascuna delle due camere ci sono $n = 0.50$ moli di gas perfetto. Inizialmente i due gas hanno la stessa pressione p_0 e la stessa temperatura $T_0 = 300\ K$. Il volume utile totale delle due camere è pari a $V = 4.0\ l$. Il calore molare a volume costante del gas è $c_V = 2R$.

Tramite un riscaldatore elettrico si fornisce lentamente calore al gas di sinistra fino a che il suo volume raggiunge il valore $V_1 = 2.6\ l$.

Calcolare:

1. Le pressioni p_1 e p_2, e le temperature T_1 e T_2 dei due gas alla fine del riscaldamento;
2. il lavoro W_d fatto sul gas di destra, e il calore Q_s fornito al gas di sinistra.
3. le variazione di entropia ΔS_1 e ΔS_2 dei due gas.

Esercizio 10.16

Un frigorifero che lavora alla massima efficienza teoricamente possibile viene utilizzato per trasformare in ghiaccio a $T_g = 273\ K$ un massa $M = 1\ kg$ di acqua, inizialmente a $T_A = 300\ K$, cedendo calore all'ambiente esterno che si trova a temperatura T_A.

Sapendo che per trasformare in ghiaccio un grammo di acqua a $T = 273\ K$ è necessario estrarre 80 cal (calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_g = 80\ cal/g$), determinare:

1. il calore ceduto dal frigorifero all'ambiente per raffreddare l'acqua da T_A a T_g;
2. il lavoro assorbito dal frigorifero per raffreddare l'acqua fino a T_g;
3. il calore ceduto dal frigorifero all'ambiente durante il processo che trasforma l'acqua a T_g in ghiaccio;
4. il lavoro complessivamente assorbito dal frigorifero per produrre il ghiaccio a partire dall'acqua a temperatura ambiente;

Esercizio 10.17

Due moli di gas perfetto compiono un ciclo reversibile scambiando calore con 3 sorgenti ideali. Nella trasformazione a contatto con $T_1 = 400\ K$ il gas raddoppia il volume, come anche in quella a contatto con $T_2 = 300\ K$.

1. Disegnare la trasformazione
2. V_f/V_i per la trasformazione a contatto con $T_3 = 100\ K$;
3. lavoro prodotto in un ciclo della macchina;
4. rendimento della macchina.

Esercizio 10.18

Un contenitore adiabatico $V_T = 20\ l$ e' diviso in due da un setto adiabatico libero di scorrere senza attrito. In ogni parte ci sono $n = 2$ moli di gas ideale monoatomico. Il volume di destra è a contatto con ghiaccio e acqua $T_0 = 273\ K$, e il volumen di sinistra si trova a T_0.

Riscaldo lentamente il volume di sinistra con una resistenza da $P = 10\ W$, e mi fermo quando $m = 10\ g$ del ghiaccio a destra si sono sciolti. $\lambda_g = 333.5\ J/g$.

1. Volume finale a destra V_A
2. Temperatura del gas a sinistra T_B
3. Tempo necessario Δt per sciogliere il ghiaccio

Esercizio 10.19

Una quantità pari a $n = 0.2$ moli di aria (gas ideale biatomico) effettuano un ciclo Diesel reversibile così composto (il rapporto di compressione $r = V_1/V_3 = 5.0$) :

1-2 compressione adiabatica; $T_1 = 300\ k$

2-3 espansione isobara; $T_3 = 3300\ k$

3-4 espansione adiabatica;

4-1 raffreddamento isocora;

1. disegnare il ciclo nel piano $p - V$;
2. ΔS_{13}^{gas}
3. T_2

4. W_{ciclo}
5. rendimento η

Esercizio 10.20

Un frigorifero si trova in un ambiente a $T_1 = 27\,°C$ e contiene 10 kg di ghiaccio a $T_2 = -23\,°C$. Le pareti non sono perfettamente adiabatiche, e il frigo scambia con l'ambiente $Q_B = 500$ J/s. Il motore del frigorifero ha una potenza di $P = 250$ W e si può considerare reversibile.

Calore specifico ghiaccio $c = 2.0$ kJ/kg K, calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_f = 333.5$ kJ/kg.

Calcolare:

1. per che frazione di tempo il motore deve stare acceso per mantenere costante la temperatura del ghiaccio;
2. la variazione di entropia dell'universo in un'ora;
3. quanto ghiaccio fonde se il motore resta spento per un'ora;
4. la variazione di entropia dell'universo in questo caso

Esercizio 10.21

Due moli di un gas biatomico ideale compiono il ciclo segiente [ABCDA]

AB espansione isobara reversibile $V_A = 10\ l$, $V_B = 30\ l$, $p_A = 5\ atm$;

BC espansione isoterma reversibile dove $\Delta S^{gas}_{BC} = 8.5\ J/K$;

CD compressione reversibile rappresentata nel piano $p - V$ da una retta, fino allo stato finale: $V_D = 20\ l$, $T_D = T_A$;

DA compressione irreversibile a contatto termico con una sorgente a temperatura T_A, lungo la quale il gas subisce un lavoro $L_{DA} = 5.0\ kJ$

1. la rappresentazione del ciclo nel piano $p - V$
2. il rendimento del ciclo
3. la variazione di entropia del gas lungo DA
4. la variazione dell'entropia dell'universo in un ciclo.

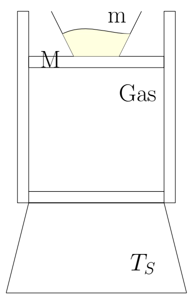
Esercizio 10.22

Un gas ideale monoatomico è contenuto dentro un contenitore rigido adiabatico chiuso da un tappo $S = 100\ cm^2$, $M = 3\ kg$ libero di muoversi senza attrito: $T_0 = 300\ K$, $V_0 = 10\ l$, $p_{atm} = 1 \cdot 10^5\ Pa$ **stato A**.

Verso lentamente $m = 30\ kg$ di sabbia sopra il tappo **st. B**

Una volta raggiunto l'equilibrio, appoggio il contenitore con sorgente ideale $T_S = 400\ K$ (fondo diventa diatermico), e si attende l'equilibrio **st. C**.

Infine, sempre con T_S a contatto, tolgo il secchio con la sabbia **st. D**.



1. il numero di moli di gas
2. la temperatura dello stato B
3. il calore scambiato (con segno) dalla sorgente durante la trasformazione B-C
4. il lavoro fatto dal gas durante la trasformazione CD
5. la variazione di entropia dell'universo dallo stato iniziale a quello finale

Soluzione dell'esercizio 10.1

1. $\Delta U = (Q_1 - Q_2) - (-P\Delta t) = 18800\ J$
2. Calore ceduto dal solido: $-Q_1 = n\int_{T_0}^{T_{eq}}(a + bT)dT$, ottengo una equazione di secondo grado, che risolvo per $T_{eq} = 278\ K$ (la seconda soluzione è negativa e non fisica).
3. $\Delta S = \int_{T_0}^{T_{eq}} \frac{n(a+bT)}{T} dT = -44.55\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.2

1. $T_{eq} = \frac{T_1+T_2}{2} = 287.5\ K$
2. $\Delta S_u = \Delta S_{gas} = m_1 C \ln \frac{T_{eq}}{T_1} + m_2 C \ln \frac{T_{eq}}{T_2} = mC \ln \frac{T_{eq}^2}{T_1 T_2} = 0.795\ J/K$
3. Se la trasformazione è reversibile, $\Delta S_u = 0$. Per fare una trasformazione reversibile posso pensare di avere N serbatoi a temperature intermedie e scambiare calore tramite cicli reversibili con queste N sorgenti fino ad arrivare all'equilibrio.
   In alternativa posso pensare a m_1 e m_2 come due sorgenti, di capacità termica finita, utilizzate da un ciclo reversibile (per esempio un ciclo di Carnot), e far andare il ciclo finchè le temperature delle due sorgenti diventano uguali (condizione di equilibrio).
   Con questo setup, noto immediatamente che il ciclo fornisce lavoro verso l'esterno, visto che lavora tra due sorgenti a temperatura diversa, e quindi mi aspetto una situazione di equilibrio diversa da quella del punto precedente, dove non veniva scambiato con l'esterno nè calore nè lavoro.
   $\Delta S_u = \Delta S_{ciclo} + \Delta S_{sorgenti} = 0$, quindi $\Delta S_{sorgenti} = mC \ln \frac{T_{eq}'^2}{T_1 T_2} = 0$, quindi $T'_{eq} = \sqrt{T_1 T_2} = 287.23\ K$.
4. Il lavoro fatto dal sistema è il lavoro fornito dalla macchina di Carnot, quindi $\mathcal{L} = |Q'_1| - |Q'_2| = 217\ J$.
   Alternativamente, posso calcolare l'energia resa inutilizzabile durante la prima trasformazione non revesibile $E_{inu} = T_2 \Delta S_u = 217\ J$, che va confrontata con quella resa inutilizzabile nella seconda trasformazione (che è evidentemente 0). La differenza è pari al lavoro che viene fornito all'ambiente dalla trasformazione reversibile.

Soluzione dell'esercizio 10.3

1. All'equilibrio $T = T_F$ e lo stagno è completamente sciolto.
   $\Delta S_{stagno} = mC_F \ln \frac{T_F}{T_0} + \frac{m\lambda_F}{T_F}$
   $\Delta S_{sorgente} = -\frac{mC_F(T_F - T_0)}{T_F} - \frac{m\lambda_F}{T_F}$
   $\Delta S_{universo} = mc \ln \frac{T_F}{T_0} - \frac{mc(T_F - T_0)}{T_F} = 42.2\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.4

1. In entrambi i casi, l'equilibrio si raggiunge quando il calore ceduto dal gas in B viene assorbito dal gas in A.
   $T_{eq} = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} = 600\ K$

2. 1. • Prima fase: $\Delta S_{gas} = \Delta S_A + \Delta S_B = n_A c_V \ln \frac{T_{eq}}{T_A} + n_B c_V \ln \frac{T_{eq}}{T_B}$

   • seconda fase: $\Delta S_{gas} = \Delta S_A + \Delta S_B = n_A c_V \ln \frac{(V_A+V_B)^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} + n_B c_V \ln \frac{(V_A+V_B)^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}}$

   2. $\Delta S_{gas} = \Delta S_A + \Delta S_B = n_A c_V \ln \frac{T_{eq}(V_A+V_B)^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} + n_B c_V \ln \frac{T_{eq}(V_A+V_B)^{\gamma-1}}{T_B V_B^{\gamma-1}} = 39.3\ J/K$
   Essendo l'entropia una funzione di stato, e essendo gli stati finali identici nei due casi, la variazione di entropia è la stessa nei due casi.

3. $\Delta S_u = \Delta S_{gas}$ in entrambi i casi, visto che il contenitore è adiabatico.

Soluzione dell'esercizio 10.5

1. $V = \frac{nRT_0}{p_0} = 50\ l$ la trasformazione è adiabatica: $p' = p\left(\frac{V}{V'}\right)^{\gamma} = 9.5 \cdot 10^5\ Pa$
2. $T' = \frac{p'V'}{nR} = 571.3\ K$
3. $p" = p'\frac{T_0}{T'} = 5 \cdot 10^5\ Pa$
4. $\mathcal{L} = -\Delta U = -nc_v(T' - T_0) = -11278\ J$
5. Collego stato iniziale e finale con isoterma reversibile: $\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V'}{V} = -26.7\ J/K$
6. $\Delta S_{amb} = 0 + \frac{nc_v(T'-T)}{T} = 37.6\ J/K$, quindi $\Delta S_u = 10.9\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.6

1. La macchina è reversibile, quindi $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_0}{T_0} = 0$, dove Q_0 è il calore scambiato dal ghiaccio e Q_1 dall'ambiente. La stessa relazione vale anche per il calore scambiato per unità di tempo $\frac{dQ}{dt}$.
   Quindi: $\frac{dQ_1}{dt} = -502\ W$ e $\frac{dQ_0}{dt} = -\frac{\frac{dQ_1}{dt}T_0}{T_1} = 444\ W$, quindi $P_{congelatore} = \frac{dQ_{congelatore}}{dt} = -\frac{dQ_{ambiente}}{dt} = -(\frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_0}{dt}) = -58\ W$;
   Quindi devo fornire $P = 58\ W$ al congelatore dall'ambiente per mantenere
2. $\Delta S_u = \Delta S_G + \Delta S_0 = \Delta t * \left(\frac{1}{T_G}\frac{dQ_G}{dt} + \frac{1}{T_0}\frac{dQ_0}{dt}\right) = 5 \cdot 10^{-5} * 3600 = 0.177\ J/K$.
   Da notare che Q_G adesso e' dal punto di vista del ghiaccio (sorgente termica) e non da quello della macchina (congelatore) come prima, quindi il segno e' opposto.
3. Per sciogliersi, il ghiaccio deve prima raggiungere la temperatura di fusione 273 K.
   $m_G c_G (T_0 - T_{273}) + \lambda m_F = \frac{dQ}{dt}\Delta t$, da cui $m_F = 1.15\ kg$
4. $\Delta S_G = c_G m_G \ln \frac{T_{273}}{T_0} + \frac{m_F \lambda}{T_{273}} = 2088 + 1466 = 3555\ J/K$
   $\Delta S_{amb} = \frac{\frac{dQ}{dt}\Delta t}{T_1} = -2983\ J/K$. Quindi $\Delta S_u = 572\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.7

1. $n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = 0.2$.
   La prima trasformazione è isocora, la temperatura dello stato finale è: $T_1 = T_0\frac{p_0}{p_1} = 600\ k$.
   La seconda transformazione è più complessa: visto che il cilindro e il pistone sono adiabatici si potrebbe pensare che anche la trasformazione sia adiabatica, ma non è così . Infatti la presenza del "piccolo foro" che collega le due parti del contenitore

non garantisce che la pressione sia uguale dalle due parti. Già questo ci fa capire che non si tratta di una trasformazione quasi statica, ma di due trasformazioni collegate. Nel volume iniziale il gas esce (portando fuori energia interna), diminuisce la pressione e la temperatura. Nel secondo volume (quello a contatto con il pistone mobile), la pressione è costante, mentre il gas entra, il volume aumenta e la temperatura cambia (inizialmente essendo vuoto, la temperatura non è definita). La situazione è quindi molto complessa.
Posso invece considerare l'insieme di tutto il gas nei due volumi, e applicare il primo principio della Termodinamica al tutto. $\Delta U = \Delta Q - \mathcal{L}$, osservando che $\Delta U = nc_v(T_2 - T_1)$ [funzione di stato], $\Delta Q = 0$ [recipiente adiabatico], e $\mathcal{L} = p_0(V_2 - V_0)$ [lavoro della pressione esterna durante l'espansione del pistone]. Usando inoltre l'equazione di stato dei gas perfetti nello stato finale $p_2V_2 = p_0V_2 = nRT_2$, si ottine: $T_2 = \frac{p_0V_0 + nc_VT_1}{nc_p} = 514.3\ K$.
considero una trasformazione che collega gli stati iniziali e finali: $\Delta U_{gas} = nc_v(T_2 - T_0) = 1250\ J$

2. considero una trasformazione isobara che collega gli stati iniziali (p_0, V_0, T_0) e finali (p_0, V_2, T_2): $\Delta S_{gas} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_0} = 3.12\ J/K$
3. $\Delta U_{ambiente} = Q - \mathcal{L} = -\mathcal{L}_{resistenza} - \mathcal{L}_{pistone} = nc_V(T_1 - T_0) + nc_V(T_2 - T_1) = -\Delta U_{gas}$
4. $\Delta S_{amb} = 0$ visto che il contenitore è adiabatico.

Soluzione dell'esercizio 10.8

1. $Q_{2\to3} = nc_p(T_3 - T_2) = \frac{c_p}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) = 1454\ J$, dove $V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 2.86\ l$
2. $Q_{4\to1} = \frac{c_p}{R}(p_4V_4 - p_1V_1) = -1271\ J$, dove $V_4 = V_3\left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 5.51\ l$
3. $\eta = \frac{|Q_{23}| - |Q_{41}|}{|Q_{23}|} = 0.126$;
4. Ricavo n calcolando la variazione di entropia dell'universo in un ciclo: $\Delta S = -\frac{Q_{41}}{T_1} - \frac{Q_{23}}{T_3} = nc_p\left(\frac{V_4}{V_1} + \frac{V_2}{V_3} - 2\right)$ (notare che il calore scambiato da una sorgente è l'opposto del calore scambiato dal gas) da cui ricavo $n = 0.4836$.
$T_{1234} = 220.5\ K,\ 252.3\ K,\ 396.9\ K,\ 346.9\ K$

Soluzione dell'esercizio 10.9

1. chiamo A il primo ciclo (tra T_1 e T_2) e B quello tra T_1 e T_3.

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1^A + Q_1^B \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}^A + \mathcal{L}^B \\ \mathcal{L}^A &= \eta_A Q_1^A \\ \mathcal{L}^B &= \eta_A Q_1^B \end{aligned}$$

da cui ricavo

$$\begin{aligned}Q_1^A &= 800\ J\\ Q_1^B &= 400\ J\\ \mathcal{L}^A &= 200\ J\\ \mathcal{L}^B &= 200\ J\end{aligned}$$

Infine: $Q_{2,3} = \mathcal{L}^{A,B} - Q_1^{A,B} = -600/-200\ J$

2. $\Delta S_1 = \frac{-Q_1}{T_1} = -3\ J/K$, $\Delta S_2 = \frac{-Q_2}{T_2} = +2\ J/K$, $\Delta S_3 = \frac{-Q_3}{T_3} = +1\ J/K$, quindi $\Delta S_{sorgenti} = 0$ (macchine reversibili)
3. $\Delta S_u = 0$

Soluzione dell'esercizio 10.10

1. $T_{eq} = \frac{n_B c_{p,B} T_B + n_A c_{V,A} T_A}{n_B c_{p,B} + n_A c_{V,A}} = 438\ K$
2. $\Delta V = \frac{n_A R (T_{eq} - T_A)}{p_{atm}} = 11.4\ l$
3. $\mathcal{L} = p_{atm} \Delta V = 1151\ J$;
4. $\Delta S_A = n_A c_{p,A} \ln \frac{T_{eq}}{T_A} = 11.04\ J/K$
   $\Delta S_B = n_B c_{p,B} \ln \frac{T_{eq}}{T_B} = -7.82\ J/K$
   $\Delta S_{tot} = 3.22\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.11

1. Volume iniziale prima della compressione $V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 24.6\ l$. La compressione è adiabatica: $T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 430.1\ k$. Quindi $Q = nc_v(T_1 - T_0) = 2705\ J$.
2. $\mathcal{L} = p_0 \Delta V = 1481\ J$.
3. $\Delta S_{amb,1} = \frac{Q}{T_0}$, $\Delta S_{amb,2} = -\frac{\mathcal{L}}{T_0}$ (perche' isoterma). $\Delta S_{amb} = 4.08\ J/k$. $\Delta S_{gas} = 0$ visto che è un ciclo.

Soluzione dell'esercizio 10.12

1. E' un ciclo, quindi $Q_1 = Q_0 + \mathcal{L}$, inoltre $\Delta S_u = \frac{Q_0}{T_0} - \frac{Q_1}{T_1}$, da cui: $Q_0 = 32.36\ KJ$, $Q_1 = 34.36\ KJ$, e $m_F = \frac{Q_0}{\lambda_F} = 96.6\ g$.
2. $\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_1} = 0.058$
3. $\eta_R = 1 - \frac{T_0}{T_1} = 0.09$, da cui $\mathcal{L}_\mathcal{R} = \frac{\eta_R}{1-\eta_R} Q_0 = 3200\ J$

Soluzione dell'esercizio 10.13

1. $\mathcal{L}_{\mathcal{AB}} = nR(T_B - T_A) = 831.4\ J$
2. DA è Adiabatica: $\frac{T_D}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ da cui $\gamma = 1 + \frac{\ln \frac{T_D}{T_A}}{\ln \frac{V_A}{V_C}} = 1.667$, quindi il gas è monoatomico

3. $\Delta S_{AB} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A}$, $\Delta S_{CD} = nc_v \ln T_D T_C$, $\Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = -\Delta S_{BC} = -1.65\ J/K$
4. Nelle trasformazioni non reversibili: $\Delta S_{amb} = \frac{Q_{CD}}{T_D} - \frac{Q_{AB}}{T_A} = 5.32\ J/K$. Per quelle reversibili $\Delta S_{uni} = 0$.
   Quindi $\Delta S_{uni} = 3.67\ J/K$.

Soluzione dell'esercizio 10.14

1. $p_A = \frac{nrT_A}{V_A} = 1.25 \cdot 10^5\ Pa$. $\Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_A) = -W_{AB}$, $T_B = 500\ K$
   $p_B = p_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 4.48 \cdot 10^5\ Pa$
2. $Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B)$ $T_C = 862\ K$ $V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = 31.9\ l$ $W_{BC} = p_C(V_C - V_B) = 6.6\ KJ$
3. $Q_{CD} = W_{DC} = nR \ln \frac{V_D}{V_C} = 3.22\ kJ$
   $W_{DA} = 0$, $Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = nc_v(T_A - T_C) = -14\ kJ$
   $\eta = 22\%$
4. Nell'espansione libera $Q = W = 0$, quindi $\eta = 6.6\%$
5. Nell'unica trasformazione irreversibile (CD), $\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_D}{V_C} = 3.74\ J/K$, $\Delta S_{amb} = 0$.

Soluzione dell'esercizio 10.15

1. $p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = 6.23 \cdot 10^5\ Pa$.
   Equilibrio meccanico $p_1 = p_2$, e compressione adiabatica $p_1 = p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma} = 1.06 \cdot 10^6\ Pa$: quindi $T_1 = \frac{p_1}{V_1} = 666\ K$
   $T_2 = \frac{p_2}{V_2} nR = 357\ K$
2. Il gas di destra fa una adiabatica: $W = -\Delta U = -nc_v(T_2 - T_0) = -490\ J$. Quindi il lavoro fatto **sul** gas e' $+490\ J$.
   Per il gas a sinistra, applico il primo principio: $\Delta Q = W + \Delta U = W + nc_V(T_1 - T_0) = 3.53\ kJ$
3. Il gas di destra fa adiabatica reversibile $\Delta S = 0$
   Quello di sinistra $\Delta S = nR \ln \frac{V_1}{V_0} + nc_V \ln \frac{T_1}{T_0} = 7.7\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.16

1. Il ciclo è reversibile, quindi

$$\Delta S_u = 0 = \frac{Q_{c1}}{T_A} + \int_{T_A}^{T_g} \frac{Mc\,dT}{T} = \frac{Q_{c1}}{T_A} + Mc \ln \frac{T_g}{T_A}$$

   da cui: $Q_{c1} = -T_A Mc \ln \frac{T_g}{T_A} = 28.3\ kcal = 1.16\ kJ$
2. Calore ceduto dall'acqua: $Q_{acqua} = Mc(T_g - T_A)$, da I principio: $W_1 = -(Q_{c1} + Mc(T_g - T_A)) = -1.29 kcal = -5.4\ kJ$
3. $0 = \frac{Q_{c2}}{T_A} + \frac{Q_g}{T_g}$, da cui: $Q_{c2} = -\frac{T_A}{T_g} Q_g = -\frac{T_A}{T_g}(-M\lambda) = 88 kcal = 368\ kJ$

4. $W_2 = -(Q_{c2} + Q_g) = -7.9\ kcal = -33.1\ kJ$, $W_{tot} = W_1 + W_2 = -9.2\ kcal = -38.6\ kJ$

Soluzione dell'esercizio 10.17

1.

Soluzione dell'esercizio 10.18

1. $Q_A = W_A$, quindi $-m\lambda = nRT_0 \ln V_A V_T/2$ da cui $V_A = 1/2e^{-\frac{m\lambda}{nRT_0}} = 4.8\ l$
2. $p_B = \frac{nRT_B}{V_T - V_A} = p_a = \frac{nRT_A}{V_A}$, $T_B = T_A \frac{V_T - V_A}{V_A} = 865\ K$
3. $$W_B = -W_A = -nRT_0 \ln V_A V_T/2 = m\lambda$$
$$Q_B = nc_V(T_B - T_0) + W_B = nc_V(T_B - T_0) + = m\lambda$$
Quindi $\Delta t = Q_B/P = 1810\ s$

Soluzione dell'esercizio 10.19

1. $\Delta S_{13} = nc_V \ln \frac{T_3}{T_1} + nR \ln \frac{V_3}{V_1} = 9.96 - 2.67\ J/K$
2. (1-2) è adiabatica: $T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$
Da eq stato dei gas perfetti $\frac{p_1}{p_3} = \frac{T_1 V_3}{T_3 V_1}$, quindi $T_2 = T_1 \left(\frac{T_1}{rT_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 943\ K$.
Oppure: (1-2) è adiabatica, quindi $\Delta S_{13}^{gas} = \Delta S_{23}^{gas} = nc_P \ln T_3 T_2$, $T_3 = T_2 e^{-\frac{\Delta S_{13}}{nc_P}}$
3. $W_{ciclo} = \Delta Q_{ciclo}$. Nelle adiabatiche il calore scambiato è nullo. $\Delta Q_{23} = nc_P \Delta T_{23}$ e $\Delta Q_{41} = nc_V \Delta T_{41}$
Mi manca T_4 (34) e' adiabatica, $T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1733\ K$
$W_{ciclo} = 1.37 \cdot 10^4 - 5.95 \cdot 10^3 = 7.75 \cdot 10^3\ J$
4. $\eta = \frac{W_{ciclo}}{\Delta Q_{ass}} = \frac{W_{ciclo}}{\Delta Q_{23}} = 0.57$

Soluzione dell'esercizio 10.20

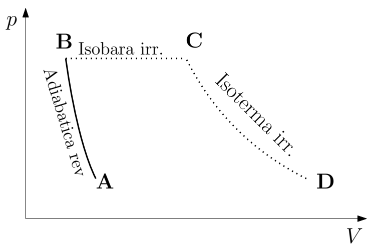
1. Potenza trasferita dal frigo all'ambiente: $\frac{dQ_A}{dt} = -\frac{dQ_B}{dt}\frac{T_A}{T_B} = 600\ W$. Potenza necessaria: $P_n = \frac{dQ_A}{dt} + \frac{dQ_B}{dt} = 100\ W$. Quindi la frazione è $f = P_n/P = 40\%$
2. $\Delta S_{ghiaccio} = 0$, $\Delta S_{compressore} = 0$, $\Delta S_{amb} = \frac{W}{T_2} * 3600 = 1200\ J/K$
3. Per portare ghiaccio a $T = 0\,°C$ serve: $Q_0 = Mc(T_0 - T_1) = 4.6 \cdot 10^5\ J$. Il calore che riceve dall'ambiente è $Q' = 500 * 3600 = 1.8 \cdot 10^6\ J$, quindi il restante $Q" = Q' - Q_0 = 1.34 \cdot 10^6\ J$ scalda l'acqua. $M = \frac{Q"}{\lambda_f} = 4.0\ kg$
4. $\Delta S'_{amb} = Q"/T_2 = -6000\ J/K$. $\Delta S'_{ghiaccio} = Mc \ln \frac{T_0}{T_1} = 1760\ J/K$, nella fusione $\Delta S'_{fusione} = \frac{m\lambda_f}{T_0} = 4910\ J/K$. $\Delta S'_u = 670\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.21

1.
2. $T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 305\ K$, $T_B = 914\ K$. $V_C = V_B e^{\frac{\Delta S}{nR}} = 50\ l$, $p_C = p_B e^{-\frac{\Delta S}{nR}} = 3\ atm$, $p_D = 2.5\ atm$.
   $L_{AB} = p_A(V_B - V_A) = 10.1\ kJ$, $L_{BC} = T\Delta S = 7.77\ kJ$, $L_{CD} = \frac{(p_C+p_D)}{2}(V_D - V_C) = -8.4\ kJ$
   $Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 35.5\ kJ$, $Q_{BC} = L_{BC}$.
   $\eta = \frac{L_{tot}}{Q_{ass}} = 10.4\%$
3. $\Delta S_{DA} = nr \ln \frac{V_A}{V_D} = -11.5\ J/K$
4. $\Delta S^{univ} = \Delta S^{univ}_{DA} = \Delta S_{DA} + \frac{Q_{DA}}{T_A} = -11.5 + 16.4 = 4.9\ J/K$

Soluzione dell'esercizio 10.22

1. $n = \frac{pV}{RT} = \frac{(Mg/S+p_{atm})V}{RT} = 0.41$ moli, $p_A = (Mg/S + p_{atm}) = 1.03 \cdot 10^5\ Pa$
2.



3. La trasformazione AB è una adiabatica (reversibile), quindi $T_B = T_0 \left(\frac{p_0}{p_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 331\ K$ con $\gamma = 5/3$ e $p_B = (M+m)g/S + p_{atm} = 1.32 \cdot 10^5\ Pa$
4. Trasformazione isobara (irr): $Q_S = -nc_p(T_S - T_B) = -n5/2R(T_S - T_B) = 585\ J$
5. Trasformazione isoterma (irr); calcolo il lavoro contro la pressione del pistone $\mathcal{L}_{CD} = -(Mg/S + p_{atm})(V_D - V_C) = -309\ J$; $V_C = \frac{nRT_S}{p_B} = 10.3\ l$ $V_D = \frac{nRT_S}{p_A} = 13.3\ l$
6. $\Delta S_u^{AB} = 0\ J/k$;
   $\Delta S_u^{BC} = nc_p \ln \frac{T_S}{T_B} - \frac{Q_S}{T_S} = 1.61 - 1.46 = 0.15\ J/K$;
   $\Delta S_u^{CD} = nR \ln \frac{p_C}{p_D} + \frac{\mathcal{L}_{CD}}{T_S} = +0.845 - 0.773 = 0.072\ J/K$

Ringraziamenti

Ringraziamenti

Gli esercizi proposti in queste pagine sono pescati o ispirati da una collezione che mi è stata fornita dal dott. P. Ronchese, che ha fatto esercizi di Fisica Generale I in passato con il prof.F. Bobisut. Senza dubbio anche la sua raccolta pesca da una memoria storica del dipartimenti di fisica, e dal contributo di esercitatori del passato. Altri esercizi derivano da miei appunti durante le lezioni del dott. P. Rossi, che svolgeva gli esercizi di Fisica Generale I per il prof. A. Bettini, quando mi sono laureato io.

Ringrazio inoltre tutti gli studenti che mi hanno segnalato imprecisioni ed errori nei testi o nelle soluzioni: Gabriele Labanca, Beatrice Moser, Davide Colucci, Paolo Simonetti, Meneghini Giuseppe, Sabatini Mattia, Matteo Fordiani, Maddalena Bin, Marco Zecchinato, Benedetta Spina, Davide Zuliani, Cecilia Antonioli, Edoardo Antonaci, Matteo Caldara, Fagherazzi Marco, Edoardo Brando, Elena Piccoli, Francesco Manzali, Giulia Zanfi, Anna Bison, Porcu Pasquale, Brunello Giacomo, Pierobon Tommaso, Davide Benedetti, Leso Aurora, Baldo Anna, Gianmarco Esposto, Lanaro Maria, Elena Del Mastro, Marcello Grenzi, Lai Nicolo', Mariacristina Fiore, Luca Novelli

Un ringraziamento particolare al dott. Stefano Zamuner, che ha svolto il ruolo di tutor degli studenti per il primo anno di svolgimento del corso, per le correzioni e i suggerimenti.

E infine, uno speciale a Paolo Ronchese, dalla cui ordinatissima raccolta ho estratto molti degli esercizi che trovate qui.