Esercizi di Elettromagnetismo

CORSO DI FISICA GENERALE II

Ultima revisione: 22 novembre 2010

A cura di: Stefano LACAPRARA

INFN Sezione di Padova
via Marzolo, 8
35131 Padova, Italia

Stefano.Lacaprara@pd.infn.it

Sommario

Questa è una raccolta di esercizi indirizzati al corso di Fisica Generale II, elettromagnetismo, corso di laurea in Fisica. Si tratta di esercizi che propongo e svolgo a lezione durante il corso alla facoltà di Fisica dell'Università di Padova. Vuole essere di aiuto agli studenti che desiderano provare a fare gli esercizi per conto loro, ma non sostituisce la lezione in aula. In particolare, le soluzioni, che si trovano alla fine dei capitoli, sono il più delle volte solo accennate o è messo solo il risultato numerico. Questo sia per non andare in competizione con il corso stesso, sia per la noia mortale che è scrivere una soluzione completa di un esercizio per quanto semplice.

Gli esercizi stessi vengono da una varietà di fonti, principalmente vecchi compiti sia proposti da me sia tramandati, come "memoria del dipartimento", dagli esercitatori del passato, spesso con modifiche e aggiornamenti.

L'ordine degli esercizi segue più o meno lo svolgimento del corso, e richiede, ovviamente, lo studio della teoria, che qui non viene minimamente trattata. Le formule utilizzate per gli esercizi svolti in modo completo sono considerate "date", e non vengono dimostate o giustificate, a meno che si tratti di casi particolari non coperti da un normale libro di testo.

La correzione delle bozze è, o meglio dovrebbe essere, una parte importante della stesura di questi esercizi: per quanto abbia fatto attenzione, errori e imprecisioni sono sempre possibili, e anzi vi sarò grato se vorrete segnalarmele.

---

[1] se lo fate, vi voglio venire a vedere! O forse no ...

Capitolo 1

Elettrostatica

1.1 Legge di Coulomb

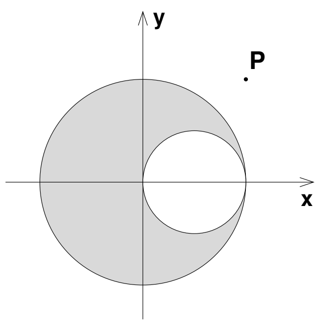
Esercizio 1

Quattro cariche puntiformi uguali, $q = 1.0\ \mu C$, sono poste ai vertici di un quadrato di lato $l = 0.1\ m$.
Determinare:

a. la forza $\vec{F}$ su ogni carica;
b. l'energia elettrostatica U_{tot} del sistema;
c. il potenziale V_0 al centro del quadrato;
d. quale carica Q_0 si deve mettere al centro del quadrato per avere equilibrio;
e. se tale equilibrio è stabile o meno.

Esercizio 2

Si ha una distribuzione di carica uniforme su una sfera di raggio $R = 1\ m$, la densità di carica per unità di volume è pari a $\rho = 1.9 \cdot 10^{-7}\ C/m^3$. Vi è all'interno della sfera una cavità anch'essa sferica, di raggio $R' = R/2$ e con centro sull'asse $\hat{x}$ ad una distanza pari a $R/2$ dal centro della sfera.



a. Calcolare il campo elettrico $\vec{E}$
b. e il potenziale V nel punto di P coordinate $(R, R, 0)$ (vedi figura)

Esercizio 3

Un filo di lunghezza $2l$ è uniformemente carico con densità lineare di carica λ.

a. Calcolare il campo elettrico sull'asse del filo;

b. e il potenziale. Estendere al caso di lunghezza indefinita.

Esercizio 4

Calcolare il campo elettrico e il potenziale dovuto ad una sfera di raggio R uniformemente carica con densità di carica ρ.

a. Lo stesso se la carica è solo sulla superficie.

b. Oppure se è distribuita su un guscio sferico con raggio interno r.

Esercizio 5

Una piccola sfera con massa $m = 11.2\ mg$ è carica con $q = 0.76\ nC$. Essa è appesa ad un filo lungo $l = 5\ cm$ e forma un angolo $\theta = 9.2 \cdot 10^{-2}\ rad$ con la verticale, e si trova di fronte ad un foglio isolante e carico uniformemente con densità superficiale di carica σ.

a. Determinare σ.

b. Che angolo forma il filo se il foglio e' un conduttore scarico?

Esercizio 6

Due fili indefiniti, paralleli, carichi uniformemente con densità di carica $\lambda = 10^{-8}\ C/m$, con segno opposto, distano $d = 5\ cm$ tra loro.
Calcolare:

a. il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto che dista 3 cm e 4 cm dal filo positivo e negativo, rispettivamente;

b. la forza per unità di lunghezza di attrazione tra i fili.

Esercizio 7

Un piano uniformemente carico con densità superficiale di carica pari a $\sigma = 1.0 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$ ha un foro circolare di raggio $R = 10\ cm$. Sull'asse del foro, ad una distanza $d = R$ si trova una carica puntiforme $q = 2 \cdot 10^{-7}\ C$.
Calcolare:

a. la forza $\vec{F}$ sulla carica;

b. il lavoro W per portare la carica q al centro del foro;

c. studiare la discontinuità del campo elettrico attraverso il foro, nell'ipotesi che il suo raggio tenda a zero.

Esercizio 8

Tre cariche puntiformi $q_1 = 8q$, $q_2 = 2q$ e $q_3 = q$ con $q = 1 \cdot 10^{-12}\ C$ sono vincolate ad una circonferenza di raggio $R = 9\ cm$ e inizialmente si trovano ai vertici di un triangolo equilatero.
Determinare:

a. l'energia potenziale di q_2;
b. la forza agente su q_2.
Successivamente q_3 viene spostata all'estremità del diametro che parte da q_1, mentre q_2 viene lasciata libera di muoversi lungo la circonferenza.
Calcolare:
c. la posizione di equilibrio di q_2;
d. l'energia elettrostatica del sistema all'equilibrio;

Esercizio 9

Da un anello sottile di materiale isolante, di raggio $R = 10\ cm$, uniformemente carico con densità lineare $\lambda = 1 \cdot 10^{-8}\ C/m$, viene rimossa una piccola sezione di lunghezza $d = 1\ cm$.
Calcolare:

a. il campo elettrico su un punto generico dell'asse dell'anello;
b. la forza esercitata su carica $q = 1 \cdot 10^{-5}\ C$ che si trova al centro dell'anello;
c. il lavoro necessario per portare la carica q all'infinito.

Esercizio 10

Un cilindro metallico di raggio $R = 10\ cm$ e altezza h, isolato e neutro, ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\omega = 3 \cdot 10^3\ rad/s$. Gli elettroni di conduzione sono liberi di muoversi solo radialmente e quindi sono trascinati nel moto di rotazione del cilindro,
Calcolare:

a. il campo elettrico dentro il cilindro;
b. la differenza di potenziale tra l'asse e la superficie esterna;
c. la densità di carica sulla superficie e nel volume.

Soluzione esercizio 1

a. La forza totale sulla carica in basso a destra, rispetto ad un sistema cartesiano (x, y) è:
$\vec{F}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l^2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(\hat{x}-\hat{y})$ $F_{tot} = 1.72\ N$

b. $U_{tot} = \frac{1}{2}\Sigma_{i\neq j}U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l}\left(4+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0.48\ J$

c. $V_0 = \Sigma i = 1^4 V_{i0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{8}{\sqrt{2}}\frac{q}{l} = 0.509\ MV$

d. $Q_0 = -\frac{q}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = -0.957\ \mu C$

e. Equilibrio instabile.

Soluzione esercizio 2

a. Uso il principio di sovrapposizione e riduco il problema ad una sfera uniformemente carica $R, +\rho$ e una $R/2, -\rho$. Visto che il punto P si trova fuori dalle sfere, per il teorema di Gauss e la simmetria delle sfere, il campo e il potenziale sono equivalenti al sistema con tutte le cariche contentrate al centro delle rispettive sfere.
$\vec{E}_{tot} = (2200\hat{x} + 1890\hat{y})\ \ V/m$

b. $V_{tot} = 4264\ V$.

Soluzione esercizio 3

a. $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\sin\bar{\theta}}{r}\hat{r}$ Dove $\bar{\theta}$ è l'angolo sotto cui viene visto il mezzo filo.
$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$ nel caso di filo indefinito.

b. $V(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2+r^2}}{-l+\sqrt{l^2+r^2}}\right)$
Nel caso indefinito $(l \to \infty)$ $V(r)$ non è definito. Invece la differenza di potenziale è ben definita:
$\Delta V(r_1, r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$

Soluzione esercizio 5

a. Equilibrio delle forze: $\sigma = 2.36 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$

b. Uso tecnica della carica immagine: il foglio conduttore è equivalente ad una carica uguale e opposta a q posta simmetricamente rispetto al piano stesso. Ancora dall'equilibrio delle forze; $\theta = 0.17\ rad$

Soluzione esercizio 6

a. $E_x = 7.20 \cdot 10^3\ V/v \quad E_y = 2.1 \cdot 10^3\ V/m$

b. $F/l = 3.6 \cdot 10^{-5}\ N/m$

Soluzione esercizio 7

a. Uso principio di sovrapposizione e considere un piano indefinito e un disco carico $-\sigma$. $F = 8 \cdot 10^{-3}\ N$.
b. $L = -\Delta U = \frac{\sigma Q R}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{2}-1\right) = 9.4 \cdot 10^{-4}\ J$
c. Non c'è discontinuità a meno che il raggio del foro non tenda a zero, nel qual caso $\Delta E^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Soluzione esercizio 8

a. $U_2 = Q_2 V_2 = 2q\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{8q}{l} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{l}\right) = 1 \cdot 10^{-12}\ J$
b.

$$\begin{aligned} F_2^x &= 3.7 \cdot 10^{-12}\ N \\ F_2^y &= -5.1 \cdot 10^{-12}\ N \end{aligned}$$

c. Studio il potenziale e cerco un minimo.
$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{8q}{2R\cos\theta} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2R\sin\theta}$
Minimo per $\frac{\partial V_2}{\partial\theta} = 0$ cioè $\theta = 26.5°$.
d. $U_{tot} = 1.5 \cdot 10^{-12}\ J$.

Soluzione esercizio 9

a. Considero il principio di sovrapposizione tra anello completo e carica $-d\lambda$ sul buco.

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}(2\pi R - d) \\ E_y &= 0 \\ E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dR\lambda}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

b. $\vec{F}(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda q d}{R^2}\hat{z} = 9 \cdot 10^{-4}\hat{z}\ N$
c. $L_{ext} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\lambda(2\pi R - d)}{R} = -5.6 \cdot 10^{-3}\ J$

Soluzione esercizio 10

a. All'equilibrio gli elettroni di conduzione risentono di una forza centrifuga dovuta ad un campo elettrico che si crea per l'accumulo di cariche sulla superficie esterna del cilindro. $E(r) = \frac{m\omega^2 r}{e}$.

b. Integrando il campo elettrico, ottengo la differenza di potenziale.

c. Usando Gauss su un cilindro coassiale di raggio $r < R$.

$$2\pi l E(r) = 1/\epsilon_0 \int_0^r \rho r 2\pi r l dr$$

Da cui risulta che $\rho(r) = \frac{2m\omega^2}{e} = 9.06 \cdot 10^{-16}$ C costante.
Dato che la carica iniziale del cilindro era nulla, la densità di carica superficiale si ottiene

$$\sigma = \frac{Q_{sup}}{S_{sup}} = \frac{-Q_{int}}{S_{sup}} = \frac{-2m/e\epsilon_0\omega^2\pi R^2 l}{2\pi R l} = -0.45 \cdot 10^{-16}\ C/m^2$$

1.2 Moto di cariche in campo elettrico

Esercizio 11

Una carica puntiforme $q = -2.0 \cdot 10^{-7}\ C$, massa $m = 2 \cdot 10^{-6}\ kg$, viene attratta da una carica $Q = 10^{-4}\ C$ distribuita uniformemente entro una sfera di raggio $R = 1\ m$ e massa molto grande. Quando la particella si trova a $d = 2\ m$ dal centro della sfera, viaggia ad una velocità pari a a $v_0 = 264.5\ m/s$ verso il centro della sfera.
Calcolare:

a. la velocità v_1 quando la particella incontra la superficie della sfera;
b. la velocità v_2 quando si trova al centro della sfera;
c. la distanza massima raggiunta dalla particella.

Esercizio 12

Una elettrone $(e,\ m_e)$ con velocità $v_0 = 6.6 \cdot 10^6\ m/s$ attraversa uno spazio di lunghezza $l = 2\ cm$, dove si trova un campo elettrico uniforme $E = 1250\ V/m$ perpendicolare a v_0.

a. Calcolare la deflessione dell'elettrone ad una distanza $L = 15\ cm$ dopo la regione con campo elettrico.
b. Supponendo che l'elettrone sia accelerato, partendo da fermo, calcolare la *d.d.p.* V_a necessaria.
c. Calcolare il lavoro L fatto dal campo deflettente.

Esercizio 13

Un corpo puntiforme con carica q, massa m, inizialmente fermo si trova all'interno di una sfera di raggio R unformemente carica con densità ρ, ad una distanza $r < R$. Descrivere il moto.

Esercizio 14

Un sistema è formato da un anello sottile, di raggio $R = 0.2\ cm$ e un filo indefinito entrambi carichi con densità di carica uniforme. La densità lineare di carica del filo è pari a $\lambda_{filo} = 10 \cdot 10^{-6}\ C/m$, quella dell'anello è λ_{anello}. L'anello giace su un piano paralleto al filo, e la distanza del suo centro dal filo è $d = 45\ cm$. Si osserva che il campo elettrico nel punto P equidistante dal filo e dall'anello è nullo.

a. Calcolare il valore di λ_{anello};

Un protone si trova ad una distanza $L = 2.0\ m$ dal centro dell'anello, sul suo asse e dalla parte opposta rispetto al filo, con una velocità v_0 diretta verso l'anello.
Determinare:

b. v_0 affinchè il protone si fermi al centro dell'anello;

c. la forza che subisce il protone quando si trova al centro dell'anello.

Soluzione esercizio 11

a. Uso conservazione dell'energia: $\frac{1}{2}mv_0^2+U(d_0) = \frac{1}{2}mv_1^2+U(R)\ldots v_1 = 400\ m/s$

b. Attenzione: ho già scelto il riferimento del potenziale $U(R=\infty) = 0$, devo calcolare $U(0)$. Conosco il campo elettrico (usando th. Gauss), lo integro e ottengo la differenza di potenziale del centro della sfera rispetto alla superficie.
$V(0) = \frac{3}{2}V(R)\ldots v_2 = 500\ m/s$

c. Alla distanza massima, l'energia cinetica è nulla. $R_{max} = 9\ m$

Soluzione esercizio 12

a. Il moto è uniforme lungo x e accelerato lungo y dentro il condensatore. Deflessione $\Delta = 1.61\ cm$.

b. $V_a = \frac{mv_0^2}{2q} = 124\ V$.

c. Il lavoro non è nullo perché il moto non è perpendicolare alla forza elettrica, solo all'ingresso del condensatore. Si può calcolare integrando la forza o calcolando la differenza di energia potenziale. $L = \frac{q^2E^2l^2}{2mv_0^2} = 2\cdot 10^{-19}\ J = 1.25\ eV$

1.3 Carica immagine

Esercizio 15

Una sfera conduttrice di raggio $R = 80\ cm$ è mantenuta a petenziale zero. Ad una distanza pari a $d = 1\ m$ dal centro viene posta una carica puntiforme $q = 3 \cdot 10^{-10}\ C$.
Calcolare:

a. la forza cui è soggetta la carica;
b. la densità della carica indotta sulla sfera.
c. Si ripeta l'esercizio nel caso in cui la sfera sia inizialmente scarica e isolata.
d. Oppure isolata e inizialmente carica con $q' = 6 \cdot 10^{-10}\ C$.

Esercizio 16

Ad un filo indefinito verticale con densità lineare di carica $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6}\ C/m$ è appesa, tramite un filo di lunghezza $l = 20\ cm$, inestensibile, privo di massa e dielettrico, una carica puntiforme $Q2 \cdot 10^{-11}\ C$, di massa $m = 11.2\ mg$.

a. Calcolare la posizione di equilibrio della carica;
b. si tratta di equilibrio stabile o instabile?

Soluzione esercizio 15

a. Uso carica immagine: carica $q_i = -\frac{R}{d}q$ a distanza $x_i = \frac{R^2}{d}$ dal centro della sfera. $F = 0.5 \cdot 10^{-9}\ N$.
b. So che sulla superficie $E = \sigma/\epsilon_0$, quindi devo calcolare il campo E sulla superficie (so già che avrà solo componente radiale). Parto dal potenziale e poi

$$E_r = -\frac{\partial V(r=R)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}\frac{R^2 - d^2}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta)^{3/2}}\hat{r}$$

$\sigma = \epsilon_0 E$.
c. Stessa situazione di prima, ma sulla superficie della sfera il potenziale è costante ma $V(R) \neq 0$. Metto una seconda carica immagine Q_0 al centro della sfera. Dato che la sfera è globalmente carica, $Q_0 = -q_i$. $F = -0.435 \cdot 10^{-8}\ N$

d. Metto una ulteriore carica immagine $Q = q'$ al centro della sfera e mi riconduco al caso precedente. $F = -2.73 \cdot 10^{-9}\ N$.

Soluzione esercizio 16

a. L'equilibrio si ottiene quando $\tan\theta = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0 l \sin\theta mg}$, nell'ipotesi di angoli piccoli, si ottiene $\theta^2 = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0 lmg}$, quindi $\theta = .146\ rad$

b.

1.4 Dipoli

Esercizio 17

Un dipolo elettrico di momento $p = 2 \cdot 10^{-11}$ Cm viene posto ad una distanza $d = 0.5$ m da un filo molto lungo, uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda = 10^{-8}$ C/m.
Il dipolo è posto sul piano del filo, perpendicolare ad esso e orientato verso l'esterno.
Calcolare:

a. il lavoro necessario per trasportare il dipolo ad una distanza $d/2$ dal filo, mantenendo costante il suo allineamento. E' fatto dal campo o contro il campo?
b. il lavoro necessario per ruotare di 30° il dipolo;
c. il momento torcente del dipolo prima e dopo la rotazione.

Esercizio 18

Tre dipoli elettrici identici, di momento $\vec{p}$, $|\vec{p}| = 1 \cdot 10^{-30}$ Cm vengono portati dall'inifito nei punti $P_{1,2,3}$, di coordinate, rispettivamente: $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, -a, 0)$ e $P_3(0, +a, 0)$ con $a = 1 \cdot 10^{-10}$ m, e con il momento di dipolo orientato come l'asse z.
Calcolare:

a. il lavoro compiuto dalle forze del campo durante il processo;
b. il campo elettrico $\vec{E}$ nei punti dell'asse z;
c. la componente lungo z della forza cui è soggetto il dipolo nel punto P_1.

Esercizio 19

Un quadrupolo elettrico è costituito da quattro cariche identiche q, due positive e due negative, poste sui vertici di un quadrato di lato $2a$, con cariche dello stesso segno poste sulle diagonali.

a. Calcolare il campo elettrico in un punto su uno degli assi del quadrato ad una distanza molto grande rispetto ad a.

Soluzione esercizio 17

a. La forza che subisce il dipolo è
$\vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial_x} + p_y \frac{\partial}{\partial_y} + p_z \frac{\partial}{\partial_z}\right) \vec{E}$
Per la simmetria del problema, la forza é radiale: $F_x = p \frac{dE_{filo}(x)}{dx}$
$W = \int_d^{d/2} p \frac{dE_{filo}(x)}{dx} dx = \int_d^{d/2} p dE_{filo} = \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_2} = 7.2 \cdot 10^{-9}\ J$

b. $W = U_i(1 - \cos\theta) = \frac{-p\lambda}{\pi\epsilon_0 d}(1 - \cos\theta) = -1.9 \cdot 10^{-9}\ J$

c. $M = pE \sin\theta = 7 \cdot 10^{-9}\ Nm$

Soluzione esercizio 18

a.
$$U_{ij} = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_{ij} = -pE_{z,ij} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} p^2 \left(\frac{1}{d_{ij}^3}\right)$$
$$L = -\Delta U = -U_{tot} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{(2a)^3}\right) = -1.9 \cdot 10^{-20}\ J$$

b. $E_z^{tot} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2}{r^3} - \frac{4z^2 - 2a^2}{(a^2+r^2)^{5/2}}\right]$

c. $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{p} \cdot \vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial z} pE_z = p \frac{\partial}{\partial z} E_z$
$F_z(z = 0) = 0$

Soluzione esercizio 19

a. Si può considerare il sistema come due dipoli identici, con momento di dipolo $p = 2qa$, orientati in direzioni opposte. Il campo risultante è la somma dei due campi dei dipoli.
$E_z(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2qa}{(R-a)^3} - \frac{2qa}{(R+a)^3}\right] = \ldots = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^4}$

1.5 Condensatori

Esercizio 20

Quattro gocce d'acqua, uguali e sferiche, sono portate ad uno stesso potenziale $V_A = 100\ V$ e poi isolate. Successivamente coalescono a formare una unica goccia.

a. Quale è il potenziale della goccia?
b. Quale è il rapporto tra l'energia elettrostatica finale e iniziale?

Esercizio 21

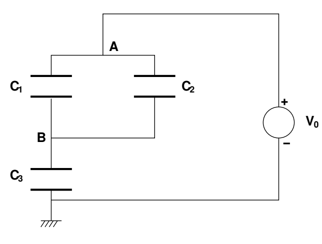
Due sferette metalliche uguali, S_1 e S_2, inizialmente lontane tra loro, con raggio $R_{1,2} = 2\ cm$ e massa $m_{1,2} = 5\ g$, inizialmente scariche, vengono collegate con fili conduttori ad una terza sfera metallica S_0, $R = 0.5\ m$, lontana da entrambe, che è carica con Q_0. Successivamente i fili vengono staccati e le sferette vengono sospese ad un unico punto tramite due fili isolanti lunghi $l = 25\ cm$ e si osserva che restano in equilibrio ad un angolo di $\theta = 30°$ con la verticale.
Calcolare, trascurando gli effetti di induzione mutua:

a. le cariche $q_{1,2}$ sulle sferette;
b. il potenziale della sfera S_0 prima del contatto;
c. l'energia elettrostatica della sfera S_0 prima del contatto;

Esercizio 22

Dato il circuito in figura, con $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $C_3 = 3\ \mu F$ e $V_0 = 100\ V$, calcolare:

a. carica sulle armature;
b. energia elettrostatica totale del sistema;
c. cariche e energia elettrostatica totale del sistema se il punto B viene messo a terra;
d. cariche, energia elettrostatica e ΔV_{AB} se il punto A viene scollegato e poi B viene messo a terra.



Esercizio 23

Un condensatore è formato da due armature semicircolari di raggio $R = 50\ cm$, parallele, distanti $d = 2\ mm$, incernierate al centro. Le armature

si sovrappongono per $\phi_0 = 60°$ e sono collegare ad una *fem* $V_0 = 50\ V$. Successivamente il generatore viene staccato e le armature sono ruotate in modo da sovrapporle di $\phi_1 = 120°$.
Trascurando tutti gli effetti di bordo, calcolare:

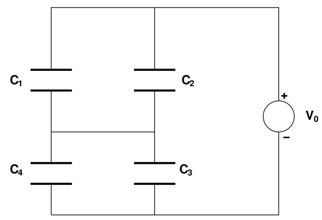
a. la *ddp* tra le armature;

b. il lavoro delle forze esterne per fare la rotazione.
Successivamente il generatore viene collegato e lo spazio tra le armature viene riempito con un dielettrico con $\kappa = 3$.

c. Determinare il lavoro compiuto dal generatore durante l'inserimento del dielettrico.

Esercizio 24

Il sistema di condensatori in figura è collegato ad una *d.d.p.* $V_0 = 15\ V$ e i valori dei condensatori sono, rispettivamente: $C_2 = 10\ pF$, $C_3 = 4\ pF$, $C_4 = 2\ pF$. Ai capi di C_4 si misura una *d.d.p.* $V_1 = 10\ V$.
Calcolare:



a. Valore di C_1;

b. energia elettrostatica totale del circuito.
Nel condensatore C_1 si inserisce una lastra di dielettrico con costante dielettrica relative $\kappa = 5$. Determinare:

c. il lavoro svolto dal generatore.

Esercizio 25

Un sistema è costituito da un condensatore con piastre quadrate, di lato $l = 20\ cm$, distanti $d = 1\ mm$, alimentato con una $ddp = 10\ kV$. Una delle due piastre è collegata ad una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4\ N/m$, inizialmente a riposo. Il condensatore viene caricato dal generatore e successivamente isolato.

a. la posizione di equilibrio d';

b. studiare il moto delle piastre;

c. l'elongazione massima della molla.

Esercizio 26

Un condensatore piano ha armature quadrate di lato $l = 20\ cm$, e distanti

$h = 1\ cm$. Lo spazio tra le due armature viene inserita una lastra conduttrice di spessore $d = 5\ mm$.

a. Calcolare la forza esercitata sulle piastre se il condensatore è carico e isolato.
b. Lo stesso se è il condensatore è collegato ad un generatore con *ddp* costante.

Esercizio 27

Un condensatore piano con piastre di superficie $\Sigma = 200\ cm^2$, e distanza $h = 5\ mm$ è connesso ad generatore con $\Delta V = 500\ V$. Appoggiata all'armatura superiore si trova una lastra di dielettrico con la stessa superficie Σ e spessore $d = 2\ mm$, costante dielettrica relativa $\kappa = 2$.
Nello spazio vuoto tra le armature c'è un elettrone che viaggia orizzontalmente con $v = 5 \cdot 10^4\ m/s$, parallelamente alle armature.

a. Calcolare il campo elettrico dentro il dielettrico.
b. la carica totale presente sulla superficie inferiore del dielettrico;
c. la forza sull'elettrone.

Esercizio 28

Un condensatore sferico ha raggio interno R_1, ad un potenziale $V_1 = 1 \cdot 10^4\ V$, e raggio esterno $R_2 = 1\ m$, collegato a terra. L'energia elettrostatica del generatore è $W_1 = 5 \cdot 10^{-2}\ J$.
La sfera esterna, inizialmente a potenziale $V = 0$, viene portata al potenziale $V_2 = 3 \cdot 10^4\ V$ rispetto alla terra, lasciando la sfera interna isolata.
L'intercapedine viene infine riempita, ad armature isolate, con un dielettrico liquido con costante dielettrica relativa $\kappa = 2$.

a. Calcolare R_1.
b. L'energia del campo elettrico interno ed esterno con l'armatura esterna a potenziale V_2.
c. Trovare l'energia elettrostatica del sistema con il dielettrico.

Esercizio 29

Un condensatore a facce piane e parallele, quadrate $L = 5\ cm$, distanza $h = 3\ mm$ è collegato ad una *ddp* $\Delta V = 1\ kV$. Una lastra di dielettrico, di spessore $s = 1\ mm$, $\kappa = 4$, viene inserita tra le armature con veleocità costante v. Calcolare:

a. v sapendo che nel circuito, durante l'inserimento, scorre una corrente di $I = 1\ \mu A$;

b. la forza esterna F_{ext} cui la lastra è sottoposta;
c. la densità di carica di polarizzazione sul dielettrico quando è completamente inserito.

Esercizio 30

Un condensatore piano, con armature quadrate ($\Sigma = 0.1\ m^2$, $h = 1\ cm$) è riempito con un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa κ varia in modo continuo da $\kappa = 3$ a $\kappa = 5$, passando dall'armatura positiva a quella negativa. E' alimentato con una *ddp* $\Delta V = 1\ kV$.
Calcolare:
a. La capacità C del condensatore;
b. la densità di carica di polarizzazione sul dielettrco.

Soluzione esercizio 20

a. $V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$, $Q_4 = 4Q$, il volume è quattro volte quello della singola goccia, quindi il raggio è $R_4 = R4^{1/3}$. $V_4 = 4^{2/3}V = 252\ V$
b. $R = 4^{5/3} = 10.1$.

Soluzione esercizio 21

a. All'equilibrio $\tan\theta = \frac{F_e}{F_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2 mg}$ $|q| = 0.44 \cdot 10^{-6}\ C$
b. Dop il contatto, il potenziale delle sfere è lo stesso: $Q_0' = \frac{R_0}{R_i}q_i$. $Q_0 = Q_0' + 2q_i = 1 \cdot 10^{-6}\ C$. Il potenziale della sfera S_0 all'inizio del processo $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_0}{R_0} = 1.8 \cdot 10^{-6}\ V$
c. $U_0 = \frac{1}{2}Q_0V_0 = 0.9\ J$.

Soluzione esercizio 22

a. C_3 è in serie con il parallelo di C_1 e C_2.
$Q_1 = 0.5{\cdot}10^{-4}\ C$, $Q_2 = 1.0{\cdot}10^{-4}\ C$, $Q_3 = 1.5{\cdot}10^{-4}\ C$. $U = 0.75{\cdot}10^{-2}\ J$
b. Resta solo il parallelo di C_1 e C_2 alimentato da ΔV
$Q_1 = 1 \cdot 10^{-4}\ C$, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-4}$, $U = 1.5 \cdot 10^{-2}\ J$.
c. Parallelo di C_1 e C_2 con carica uguale a quella presente prima di scollegare il generatore. $\Delta V_{AB} = \frac{Q_{1+2}}{C_1+C_2} = 50\ V$.
$Q_1 = 0.5 \cdot 10^{-4}\ C$, $Q_2 = 1.0 \cdot 10^{-4}\ C$
$U = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\Delta^2 V_{AB} = 3.75 \cdot 10^{-3}\ J$

Soluzione esercizio 23

a. $C_i = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0}{d}\pi R^2 \frac{\theta_i[rad]}{2\pi} = 23\ pF$ $C_f = 2C_i$.
Le armature sono isolate, quindi la carica è costante. $V_f = \frac{C_i}{C_f}V_0 = 25\ V$

b. $L_{ext} = +\Delta U = \frac{1}{2}C_f V_f^2 - \frac{1}{2}C_i V_i^2 = -1.44 \cdot 10^{-8}\ J$ Rotazione è spontanea.

c. $L_{gen} = V_0 \Delta Q = V_0(Q'_f - Q_f) = V_0^2 C_f(\kappa - 1) = 2.3 \cdot 10^{-7}\ J$

Soluzione esercizio 24

a. $C_1 = 2\ pF$;

b. $U_{tot} = 4.5 \cdot 10^{-10}\ J$;

c. $L_{gen} = 1.4 \cdot 10^{-10}\ J$.

Soluzione esercizio 25

a. La forza elettrostatica è costante $F_{es} = \Sigma\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{l^2\epsilon_0\Delta^2 V}{2d} = 17.7\ N$, la forza elastica $F_{el} = -kx$. Equilibrio quando $kx = F_{es}$: $x_{eq} = 0.354\ mm$.

b. Il moto è armonico, attorno alla posizione di equilibrio del punto precendete. $x(t) = x_{eq}(1 - \cos(\omega t))$

c. $x_{max} = 2x_{eq} = .708\ mm$

Soluzione esercizio 26

a. Mentre la lastra di conduttore viene inserito per una profondità x, considero il sistema come due condensatori in parallelo, uno con e uno senza lastra di conduttore. Quello con il conduttore è equivalente a due condenzsatori in serie, con una distanza totale tra le lastre $h-d$.
La capacità equivalente del sistema risulta:
$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 l}{h}(x(\alpha - 1) + l)$ dove $\alpha = \frac{h}{h-d}$
L'energia elettrostatica risulta $U_{es} = \frac{Q^2}{2_C eq}$
Nel caso di carica costante, l'energia totale è solo quella elettrostatica del condensatore, quindi la forza che subisce la lastra è
$F_x = -\partial U_{es} \partial x = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 l}\frac{\alpha - 1}{(x(\alpha-1)+l)^2}$.
La forza è positiva, la lastra viene risucchiata.
Si può anche calcolare il lavoro totale durante l'inserimento della lastra.
$L = -\frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 l}\left[\frac{1}{l\alpha} - \frac{1}{l}\right] > 0$

b. Con condensatore collegato, l'energia totale tiene conto anche del lavoro del generatore per mantenere la *ddp* costante, che risulta essere il doppio della corrispondente variazione di energia elettrostatica: quindi risulta $F_x = -\partial U_{es+gen}\partial x = +\partial U_{es}\partial x$
$U_{es} = \frac{c_{eq}\Delta^2 V}{2}$, da cui $F_x = \frac{\Delta^2 V \epsilon_0 l}{2\epsilon_0}(\alpha - 1)$
Sempre attrattiva, come prima.
Da notare che anche se la forza è attrattiva in entrambi casi, le forze sono diverse (dipendente da x nel primo caso, costante nel nel secondo) e anche il lavoro totale risulta diverso.

Soluzione esercizio 27

a. $\Delta V = E_V(h-d) + E_D d$, e $E_V = \kappa E_D$, quindi $E_D = \frac{\Delta V}{\kappa(h-d)+d} = 6.25 \cdot 10^5\ V/m$; $E_V = 1.25 \cdot 10^5\ V/m$.
Il campo nel condensatore completamente vuoto è $E = 1 \cdot 10^5\ V/m$.

b. $Q_P = \Sigma\sigma_P = \Sigma\epsilon_0(\kappa - 1)E_D = 1.11 \cdot 10^{-11}\ C$
La carica sulle armature è $Q = C\Delta V = 2.53 \cdot 10^{-8}\ C$

c. $F_e = E_V e$

Soluzione esercizio 28

a. La capacità di un condensatore sferico è $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, essendo $W_1 = \frac{1}{2}CV_1^2$ si ottiene $R_1 = 0.9\ m$.

b. Il sistema non è più un semplice condensatore, visto che non c'è piu' induzione totale tra le armature.
La carica sull'armatura interna è
$Q_1 = V_1 * 4\pi\epsilon_0 R_1 = 1 \cdot 10^{-5}\ C$
Sull'armatura esterna, la carica è invece
$Q_2 = V_2 * 4\pi\epsilon_0 R_2 = 3.33 \cdot 10^{-6}\ C$
Inoltre c'è induzione totale tra l'armatura interna e quella esterna, quindi sulla superficie interna della armatura esterna, si trova una carica $-Q_1$. La carica totale che vedo dall'esterno è quindi solo Q_2 (schermo elettrostatico).
Il sistema è quindi equivalente ad un condensatore sferico con raggio R_1 e R_2 e uno sferico con R_2 e $R = \infty$. L'energia risulta quindi:
$W_2^{int} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_2 - 1/R_2}}$
$W_2^{est} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

c. Nel dielettrico $E' = E^{int}/\kappa$, la densità di energia $w_E^{dielettrico} = \frac{1}{2}\vec{E}'D = \frac{\epsilon_0}{2}kE'^2 = \frac{\epsilon_0 E_{int}^2}{2\kappa} = w_E^{vuoto}/\kappa$

$W_3^{int} = W_2^{int}/\kappa$, $W_3^{est} = W_2^{est}$ $W_3 = 7.5 \cdot 10^{-2}\ J$.

Soluzione esercizio 29

a. La capacità durante l'insrimento è
$C(x) = \frac{\epsilon_0 L(L-x)}{h} + \frac{\kappa\epsilon_0 Lx}{s(1-\kappa)+\kappa h}$
$i = \frac{dQ}{dt} = V_0\frac{C(t)}{dt} = V_0 v\left[\frac{\kappa\epsilon_0}{s(1-\kappa)_\kappa h} - \frac{\epsilon_0 L}{h}\right]$
Da cui si ricava $v = 20.3\ m/s$

b. $F_x = +\frac{dU_{ES}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}C(x)V_0^2\right) = 2.5 \cdot 10^{-5}\ N$

Soluzione esercizio 30

a. $\kappa(x) = 3 + \frac{2x}{h}$
$\frac{1}{C} = \int_0^h \frac{dx}{\Sigma\epsilon_0\kappa(x)} = \frac{h}{2\Sigma\epsilon_0}\ln\frac{5}{3}$
$C = 0.35\ nF$

b. $Q_{armature} = C\Delta V = 0.35 \cdot 10^{-6}\ C$.
Dentro il dielettrico $\vec{D}$ è costante, dato che dipende solo dalla carica libera $D = \frac{Q_a}{\Sigma}$.
Il vettore polarizzazione $P = \frac{\kappa-1}{\kappa}D$ e dipende da x tramite κ.
La densità di carica di polarizzazione sulle superficii del dielettrico vale:
$\sigma_p = \vec{P}\hat{n} = \frac{Q}{\Sigma}\frac{\kappa(x)-1}{\kappa(x)}$
$\sigma_p(x=0) = -\frac{2Q}{3\Sigma} = -2.3 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$
$\sigma_p(x=h) = +\frac{4Q}{5\Sigma} = +2.8 \cdot 10^{-6}\ C/m^2$
All'interno del dielettrico, la densità di carica è:

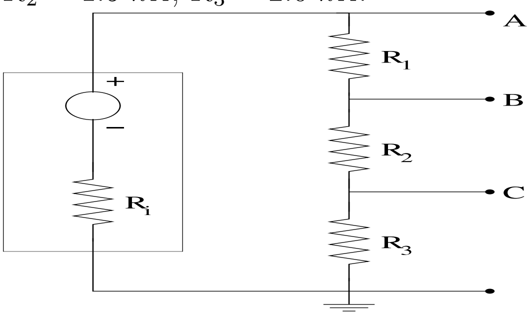
$$\rho_p = -\vec{\nabla}\vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -\frac{Q}{\Sigma}\left(\frac{2/h}{(3+2x/h)^2}\right)$$

La carica totale che si trova dentro il dielettrco si ottiene integrando la densità nel volume. $Q_P^V = -\frac{2}{15}Q$.
Come prevedibile, la somma totale delle cariche nel dielettrico risulta nulla $Q_P^{tot} = \left(-\frac{12}{15} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)Q = 0$

1.6 Circuiti resistivi

Esercizio 31

Il circuito in figura è alimentato con una generatore reale, con *fem* $V_0 = 100\ V$ e una resistenza interna $R_i = 10\ \Omega$. Le resistenze hanno valori: $R_1 = 1.0\ k\Omega$, $R_2 = 1.5\ k\Omega$, $R_3 = 2.0\ k\Omega$.

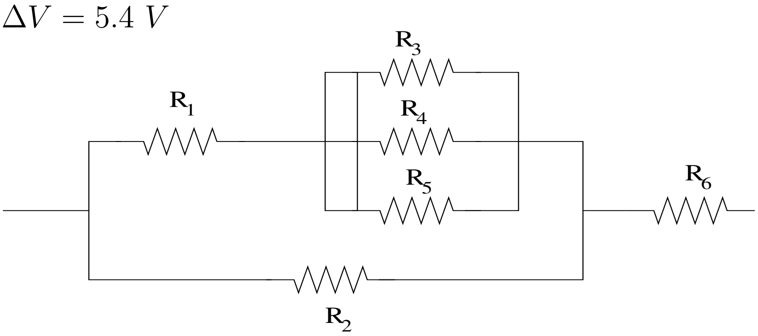


Calolare:

a. il potenziale (rispetto a terra) dei punti A, B, e C;
b. la tensione ai capi del generatore reale.

Esercizio 32

Le resistenze del circuito in figura hanno valori: $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 12\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $R_5 = 4\ \Omega$, $R_6 = 5\ \Omega$, e la *ddp* ai capi del circuito è $\Delta V = 5.4\ V$



Calolare:

a. il valore della resistenza vista ai capi del circuito;
b. la corrente su ciascuna resistenza;
c. la differenza di potenziale resistenza.

Esercizio 33

Una sottile barra di grafite ($\rho = 1 \cdot 10^{-5}\ \Omega m$), lunga $L = 200\ cm$ e sezione quadrata $a = 2\ mm$, è immersa in un campo magnetico $B = 0.8\ T$,

perpendicolare ad una delle facce laterali. Le due estremità della barra sono collegate ad una *fem* $V_0 = 5\ V$.
Calcolare:

a. la potenza erogata dal generatore;
b. la forza necessaria per tenere ferma la barra;
c. la *d.d.p.* tra le due coppie di facce opposte $N(e^-) = 0.5 \cdot 10^{17}\ mm^{-3}$.

Esercizio 34

Un festone di lampadine per l'albero di Natale è composto da 50 lampadine poste in serie. Una di queste si brucia, e viene esclusa dal festone, cortocircuitando i capi.

a. Collegando il festone allo stesso generatore, la luce prodotta aumenta o diminuisce?

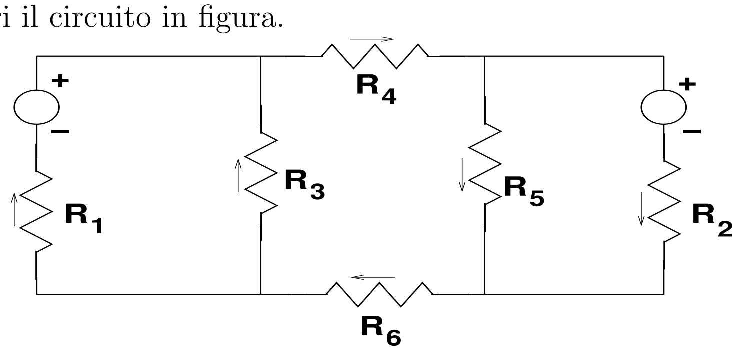
Esercizio 35

Una linea elettrica trasporta una potenza pari a $W_E = 45\ MW$ ad una distanza di $L = 25\ km$, con due cavi di alluminio ($\rho_{Al} = 2.65 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$) con una sezione circolare di raggio $R = 3\ cm$.
La potenza dissipata non deve superare complessivamente $W_D = 35\ kW$.

a. Quale è la minima ΔV che deve essere prodotta dal generatore?
b. Quale è la caduta di potenziale tra il generatore e il carico a valle?
c. Quale sarebbe la potenza che il generatore dovrebbe erogare data la ΔV del punto *a.* per avere il massimo trasferimento di potenza sul carico?

Esercizio 36

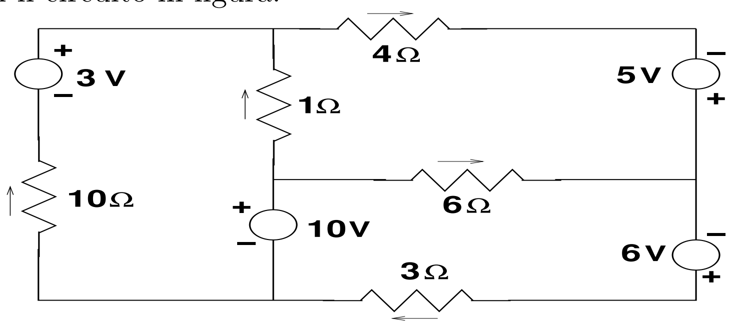
Si consideri il circuito in figura.



a. Calcolare la corrente su ogni resistenza.

Esercizio 37

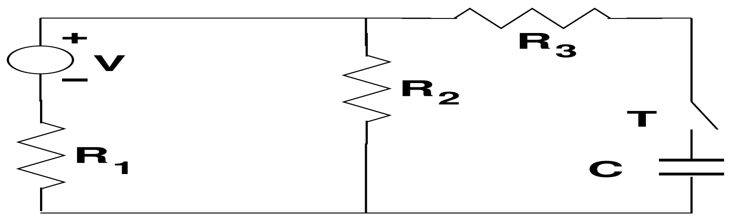
Si consideri il circuito in figura.



a. Calcolare la corrente su ogni resistenza.

Esercizio 38

Gli elementi del circuito in figura sono i seguenti: $R_1 = R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, $C = 10\mu C$, $V = 100\ V$ e l'interruttore T inizialmente aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore T viene chiuso, e si attende che il ciruito arrivi all'equilibrio.

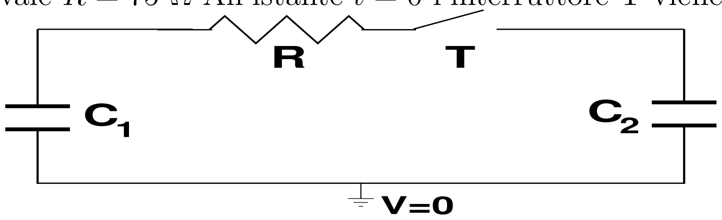


Calcolare:

a. I_2 su R_2 per $t < 0$;
b. la carica Q presente sulla capacità a regime;
c. la corrente I_2 in funzione del tempo;
d. la potenza P_2 dissipata sulla resisteza R_2 all'istante $t = 4\ ms$.

Esercizio 39

Gli elementi del circuito in figura sono i seguenti: $C_1 = 33\ \mu F$ inizialmente carico con $V_1 = 100\ V$, $C_2 = 100\ \mu F$ carico con $V_2 = 50\ V$. La resistenza vale $R = 75\ \Omega$ All'istante $t = 0$ l'interruttore T viene chiuso.



Calcolare:

a. La corrente $I(t)$ sulla resistenza;
b. L'energia W dissipata sulla resistenza.

Soluzione esercizio 31

a. $V_A = 100\ V$, $V_B = 77.6\ V$ $V_C = 44.3\ V$;
b. $\Delta V_{gen} = (100 - 0.22)\ V$.

Soluzione esercizio 32

a. $R_{tot} = 9\ \Omega$;
b. $i_1 = 0.48\ A$, $i_2 = 0.12\ A$, $i_3 = 0.08\ A$, $i_4 = 0.16\ A$, $i_5 = 0.24\ A$, $i_6 = 0.6\ A$;
c. $\Delta V_1 = 1.44\ V$, $\Delta V_2 = 2.40\ V$, $\Delta V_3 = 0.96\ V$, $\Delta V_4 = 0.96\ V$, $\Delta V_5 = 0.96\ V$, $\Delta V_6 = 3.00\ V$;

Soluzione esercizio 33

a. $P = 5\ W$;
b. $F = 1.6\ N$;
c. $\Delta V = 10\ \mu V$.

Soluzione esercizio 34

a. La luce emessa da una lampadina è proporzionale alla potenza dissipata per effetto joule. Si può quindi ragionare in termini di potenza dissipata da 50 o 49 lampadine. Occorre anche tenere conto della resistenza interna del generatore.
$I = V_{gen}/R_i + N \cdot R$ con $N = 50, 49$
$P_N = \frac{NV_{gen}R^2}{(R_i+N\cdot R)^2}$
$P_{50} > P_{49}$ se $R < \frac{R_i}{\sqrt{50\cdot 49}}$

Soluzione esercizio 35

a. La resistenza di ciascuno dei cavi è $R_F = \frac{\rho L}{\pi R^2} = .235\ \Omega$
La potenza dissipata sul carico è $W_E = \Delta V i$, dove ΔV è la *ddp* ai capi del carico, per ipotesi, da verificare a posteriori, supponiamo che sia la stessa *ddp* ai capi del generatore. La potenza dissipata sui due fili è $2R_F i^2 < W_D$. Quindi: $\Delta V > 164.4\ kV$.
b. La corrente erogata nel generatore è $i = W_E/\Delta V = 273\ A$, quindi sui fili cadono complessivamente $128\ V$, trascurabili rispetto a ΔV

c. Il massimo trasferimento si ottine quando la potenza sul carico è massima, e questo avviene quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza interna, nel nostro caso $R = 2R_F$. Con la ΔV del punto a. la corrente dovrebbe essere $i' \approx 165\ kA$, e quindi il generatore dovrebbe erogare $W_{gen} = 25\ GW$, di cui metà verrebbe dissipata sui fili, e metà sul carico. Per confronto, la potenza totale impiegata in Italia è dell'ordine di 30 GW.

Soluzione esercizio 36

a. Nel verso indicato in figura su ogni resistenza: $I_1 = 2.15\ A$, $I_2 = 2.62\ A$, $I_3 = -0.38\ A$, $I_4 = 1.77\ A$, $I_5 = -0.85\ A$, $I_6 = 1.77\ A$.

Soluzione esercizio 37

a. Nel verso indicato in figura su ogni resistenza: $I_{10\ \Omega} = -0.544\ A$, $I_{1\ \Omega} = 0.474\ A$, $I_{4\ \Omega} = 1.018\ A$, $I_{6\ \Omega} = -0.105\ A$, $I_{3\ \Omega} = 1.123\ A$.

Soluzione esercizio 38

a. $i = \frac{V}{R_1+R_2} = 0.25\ A$;

b. $Q = \frac{CVR_2}{R_1+R_2} = 5 \cdot 10^{-4}\ C$;

c. $I_2(t) = 0.25\ [A] \cdot \left(1 - 0.25e^{-\frac{t\ [ms]}{4}}\right)$

d. $P_2 = R_2 I_2^2(t = 4\ ms) = 15.45\ W$

Soluzione esercizio 39

a. $i(t) = \frac{Q_{tot}}{RC_\parallel}\left(1 - \frac{2C_\parallel}{C_1}\right) e^{\frac{t}{RC_\parallel}}$

b. $W_D = U_{ini} - U_{fin} = \frac{C_1V_1^2+C_2V_2^2}{2} - \frac{C_1+C_2V'^2}{2} = 3.1 \cdot 10^{-2}\ J$, dove $V' = \frac{C_1V_1+C_2V_2}{C_1+C_2} = 62.4\ V$