

## 1.5 Condensatori

### Esercizio 20

Quattro gocce d'acqua, uguali e sferiche, sono portate ad uno stesso potenziale  $V_A = 100 \text{ V}$  e poi isolate. Successivamente coalescono a formare una unica goccia.

- Quale è il potenziale della goccia?
- Quale è il rapporto tra l'energia elettrostatica finale e iniziale?

### Esercizio 21

Due sferette metalliche uguali,  $S_1$  e  $S_2$ , lontane tra loro, con raggio  $R_{1,2} = 2 \text{ cm}$  e massa  $m_{1,2} = 5 \text{ g}$ , inizialmente scariche, vengono collegate con fili conduttori ad una terza sfera metallica  $S_0$ ,  $R = 0.5 \text{ m}$ , lontana da entrambe, che è carica con  $Q_0$ . Successivamente i fili vengono staccati e le sferette vengono sospese a due fili isolanti lunghi  $l = 25 \text{ cm}$  e si osserva che restano in equilibrio ad un angolo di  $\theta = 30^\circ$  con la verticale.

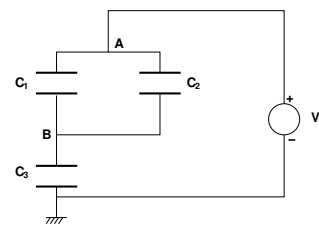
Calcolare, trascurando gli effetti di induzione mutua:

- le cariche  $q_{1,2}$  sulle sferette;
- il potenziale della sfera  $S_0$  prima del contatto;
- l'energia elettrostatica della sfera  $S_0$  prima del contatto;

### Esercizio 22

Dato il circuito in figura, con  $C_1 = 1 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 3 \mu\text{F}$  e  $V_0 = 100 \text{ V}$ , calcolare:

- carica sulle armature;
- energia elettrostatica totale del sistema;
- cariche e energia elettrostatica totale del sistema se il punto  $B$  viene messo a terra;
- cariche, energia elettrostatica e  $\Delta V_{AB}$  se il punto  $A$  viene scollegato e poi  $B$  viene messo a terra.



### Esercizio 23

Un condensatore è formato da due armature semicircolari di raggio  $R = 50 \text{ cm}$ , parallele, distanti  $d = 2 \text{ mm}$ , incernierate al centro. Le armature si sovrappongono per  $\phi_0 = 60^\circ$  e sono collegate ad una *fem*  $V_0 = 50 \text{ V}$ .

Successivamente il generatore viene staccato e le armature sono ruotate in modo da sovrapporle di  $\phi_1 = 120^\circ$ .

Trascurando tutti gli effetti di bordo, calcolare:

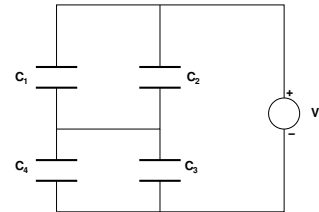
- la  $ddp$  tra le armature;
- il lavoro delle forze esterne per fare la rotazione.  
Successivamente il generatore viene collegato e lo spazio tra le armature viene riempito con un dielettrico con  $\kappa = 3$ .
- Determinare il lavoro compiuto dal generatore durante l'inserimento del dielettrico.

### Esercizio 24

Il sistema di condensatori in figura è collegato ad una  $d.d.p.$   $V_0 = 15\text{ V}$  e i valori dei condensatori sono, rispettivamente:  $C_2 = 10\text{ pF}$ ,  $C_3 = 4\text{ pF}$ ,  $C_4 = 2\text{ pF}$ . Ai capi di  $C_4$  si misura una  $d.d.p.$   $V_1 = 10\text{ V}$ .

Calcolare:

- Valore di  $C_1$ ;
- energia elettrostatica totale del circuito.  
Nel condensatore  $C_1$  si inserisce una lastra di dielettrico con costante dielettrica relativa  $\kappa = 5$ . Determinare:
- il lavoro svolto dal generatore.



### Esercizio 25

Un sistema è costituito da un condensatore con piastre quadrate, di lato  $l = 20\text{ cm}$ , distanti  $d = 1\text{ mm}$ , alimentato con una  $ddp = 10\text{ kV}$ . Una delle due piastre è collegata ad una molla di costante elastica  $k = 5 \cdot 10^4\text{ N/m}$ , inizialmente a riposo. Il condensatore viene caricato dal generatore e successivamente isolato.

- la posizione di equilibrio  $d'$ ;
- studiare il moto delle piastre;
- l'elongazione massima della molla.

### Esercizio 26

Un condensatore piano ha armature quadrate di lato  $l = 20\text{ cm}$ , e distanti  $h = 1\text{ cm}$ . Lo spazio tra le due armature viene inserita una lastra conduttrice di spessore  $d = 5\text{ mm}$ .

- a. Calcolare la forza esercitata sulle piastre se il condensatore è carico e isolato.
- b. Lo stesso se è il condensatore è collegato ad un generatore con  $ddp$  costante.

### Esercizio 27

Un condensatore piano con piastre di superficie  $\Sigma = 200 \text{ cm}^2$ , e distanza  $h = 5 \text{ mm}$  è connesso ad generatore con  $\Delta V = 500 \text{ V}$ . Appoggiata all'armatura superiore si trova una lastra di dielettrico con la stessa superficie  $\Sigma$  e spessore  $d = 2 \text{ mm}$ , costante dielettrica relativa  $\kappa = 2$ .

Nello spazio vuoto tra le armature c'è un elettrone che viaggia orizzontalmente con  $v = 5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ , parallelamente alle armature.

- a. Calcolare il campo elettrico dentro il dielettrico.
- b. la carica totale presente sulla superficie inferiore del dielettrico;
- c. la forza sull'elettrone.

### Esercizio 28

Un condensatore sferico ha raggio interno  $R_1$ , ad un potenziale  $V_1 = 1 \cdot 10^4 \text{ V}$ , e raggio esterno  $R_2 = 1 \text{ m}$ , collegato a terra. L'energia elettrostatica del generatore è  $W_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .

La sfera esterna, inizialmente a potenziale  $V = 0$ , viene portata al potenziale  $V_2 = 3 \cdot 10^4 \text{ V}$  rispetto alla terra, lasciando la sfera interna isolata.

L'intercapedine viene infine riempita, ad armature isolate, con un dielettrico liquido con costante dielettrica relativa  $\kappa = 2$ .

- a. Calcolare  $R_1$ .
- b. L'energia del campo elettrico interno ed esterno con l'armatura esterna a potenziale  $V_2$ .
- c. Trovare l'energia elettrostatica del sistema con il dielettrico.

### Esercizio 29

Un condensatore a facce piane e parallele, quadrate  $L = 5 \text{ cm}$ , distanza  $h = 3 \text{ mm}$  è collegato ad una  $ddp$   $\Delta V = 1 \text{ kV}$ . Una lastra di dielettrico, di spessore  $s = 1 \text{ mm}$ ,  $\kappa = 4$ , viene inserita tra le armature con velocità costante  $v$ . Calcolare:

- a.  $v$  sapendo che nel circuito, durante l'inserimento, scorre una corrente di  $I = 1 \text{ }\mu\text{A}$ ;
- b. la forza esterna  $F_{ext}$  cui la lastra è sottoposta;

- c. la densità di carica di polarizzazione sul dielettrico quando è completamente inserito.

### Esercizio 30

Un condensatore piano, con armature quadrate ( $\Sigma = 0.1 \text{ m}^2$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ) è riempito con un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa  $\kappa$  varia in modo continuo da  $\kappa = 3$  a  $\kappa = 5$ , passando dall'armatura positiva a quella negativa. E' alimentato con una ddp  $\Delta V = 1 \text{ kV}$ . Calcolare:

- La capacità  $C$  del condensatore;
- la densità di carica di polarizzazione sul dielettrico.

### Soluzione esercizio 20

- $V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ ,  $Q_4 = 4Q$ , il volume è quattro volte quello della singola goccia, quindi il raggio è  $R_4 = R4^{1/3}$ .  $V_4 = 4^{2/3}V = 252 \text{ V}$
- $R = 4^{5/3} = 10.1$ .

### Soluzione esercizio 21

- All'equilibrio  $\tan \theta = \frac{F_e}{F_p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2 mg}$   $|q| = 0.44 \cdot 10^{-6} \text{ C}$
- Dop il contatto, il potenziale delle sfere è lo stesso:  $Q'_0 = \frac{R_0}{R_i} q_i$ .  
 $Q_0 = Q'_0 + 2q_i = 1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ . Il potenziale della sfera  $S_0$  all'inizio del processo  $V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R_0} = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ V}$
- $U_0 = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = 0.9 \text{ J}$ .

### Soluzione esercizio 22

- $C_3$  è in serie con il parallelo di  $C_1$  e  $C_2$ .  
 $Q_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ,  $Q_2 = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ,  $Q_3 = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ .  $U = 0.75 \cdot 10^{-2} \text{ J}$
- Resta solo il parallelo di  $C_1$  e  $C_2$  alimentato da  $\Delta V$   
 $Q_1 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ,  $Q_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $U = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$ .
- Parallelo di  $C_1$  e  $C_2$  con carica uguale a quella presente prima di scollegare il generatore.  $\Delta V_{AB} = \frac{Q_{1+2}}{C_1+C_2} = 50 \text{ V}$ .  
 $Q_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ,  $Q_2 = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ C}$   
 $U = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) \Delta^2 V_{AB} = 3.75 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

**Soluzione esercizio 23**

- a.  $C_i = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0}{d} \pi R^2 \frac{\theta_i [\text{rad}]}{2\pi} = 23 \text{ pF}$   $C_f = 2C_i$ .  
Le armature sono isolate, quindi la carica è costante.  $V_f = \frac{C_i}{C_f} V_0 = 25 \text{ V}$
- b.  $L_{ext} = +\Delta U = \frac{1}{2} C_f V_f^2 - \frac{1}{2} C_i V_i^2 = -1.44 \cdot 10^{-8} \text{ J}$  Rotazione è spontanea.
- c.  $L_{gen} = V_0 \Delta Q = V_0 (Q'_f - Q_f) = V_0^2 C_f (\kappa - 1) = 2.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}$

**Soluzione esercizio 24**

- a.  $C_1 = 2 \text{ pF}$ ;
- b.  $U_{tot} = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ ;
- c.  $L_{gen} = 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ .

**Soluzione esercizio 25**

- a. La forza elettrostatica è costante  $F_{es} = \Sigma \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{l^2 \epsilon_0 \Delta^2 V}{2d} = 17.7 \text{ N}$ , la forza elastica  $F_{el} = -kx$ . Equilibrio quando  $kx = F_{es}$ :  $x_{eq} = 0.354 \text{ mm}$ .
- b. Il moto è armonico, attorno alla posizione di equilibrio del punto precedente.  $x(t) = x_{eq}(1 - \cos(\omega t))$
- c.  $x_{max} = 2x_{eq} = .708 \text{ mm}$

**Soluzione esercizio 26**

- a. Mentre la lastra di conduttore viene inserito per una profondità  $x$ , considero il sistema come due condensatori in parallelo, uno con e uno senza lastra di conduttore. Quello con il conduttore è equivalente a due condensatori in serie, con una distanza totale tra le lastre  $h-d$ . La capacità equivalente del sistema risulta:  
 $C_{eq} = \frac{\epsilon_0 l}{h} (x(\alpha - 1) + l)$  dove  $\alpha = \frac{h}{h-d}$   
 L'energia elettrostatica risulta  $U_{es} = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$   
 Nel caso di carica costante, l'energia totale è solo quella elettrostatica del condensatore, quindi la forza che subisce la lastra è  
 $F_x = -\partial U_{es} / \partial x = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 l} \frac{\alpha - 1}{(x(\alpha - 1) + l)^2}$ .  
 La forza è positiva, la lastra viene risucchiata.  
 Si può anche calcolare il lavoro totale durante l'inserimento della lastra.  
 $L = -\frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 l} \left[ \frac{1}{l\alpha} - \frac{1}{l} \right] > 0$