Capitolo 3

Onde e oscillazioni

3.1 Equazioni di Maxwell

Esercizio 54

Due lastre metalliche circolari coassiali con raggio $r = 3\ m$ e distanza $d = 0.05\ m$, inizialmente caricate con carica uguale e opposta pari a $Q = 5 \cdot 10^{-5}\ C$, si allontanano, rimanendo parallele a se stesse con velocità $v = 0.03\ m/s$. Un generatore mantiene costante la differenza di potenziale tra le piastre.
Determinare:

a. La densità della corrente di spostamento J_s all'istante $t = 0\ s$;
b. La circuitazione del campo magnetico Γ_B su un cerchio coassiale di raggio $r = 0.1$ all'istante $t = 2\ s$;
c. Il campo magnetico B in un ponto generico della circonferenza;
d. Cosa succede se la circonferenza viene spostata fuori dell'asse del sistema?

Esercizio 55

Un condensatore piano, con armature circolari di raggio $r_1 = 50\ cm$, distanti $h = 5\ cm$, è collegato ad un generatore di *f.e.m.* costante $V_0 = 100\ V$, con resistenza interna $R_0 = 5\ \Omega$ tramite un interruttore. Tra le piastre del condensatore di trova un avvolgimento toroidale, con $N = 10^4$ spire, coassiale al condesatore e ortogonale alle sue armature. La sezione dell'avvolgimento è rettangolare con lati $a = 4\ cm$ e $b = 2.5\ mm$, e raggio medio $r_2 = 20\ cm$. L'avvolgimento toroidale è chiuso su una resistenza $R = 20\ \Omega$ e collegato ad un galvanometro balistico.

Determinare:

a. Il rapporto $R = q/Q$ tra q la carica che fluisce nel galvanometro tra il momento della chiusura dell'interruttore e il raggiungimento di condizione stazionarie, e Q, la cirica presente sulle piastre del condensatore a regime.

b. Lo stesso rapporto se il condensatore non è nel vuoto ma in un dieletrico omogeneo di costante dielettrica $\kappa = 5$.

Soluzione esercizio 54

a. $I_s = \frac{1}{c^2\mu_0}\frac{\partial\Phi_E}{\partial t} = \epsilon_0\frac{\partial\Phi_E}{\partial t}$
$C = \frac{\epsilon_0\pi r^2}{d} = 5\ nF$
$j_s = \epsilon_0\frac{\Delta V v}{(d+vt)^2} = 1.06\cdot 10^{-6}\ A/m^2(t=0\ s) \quad ; \quad 2.19\cdot 10^{-7}\ A/m^2(t = 2\ s)$

b. $\Gamma_B = \mu_0 j_s \Sigma = 7.78\cdot 10^{12}\ Tm$

c. $B(r) = \frac{\mu_0 r j_s}{2} = 4.13\cdot 10^{13}\ T$

d. Risposta a 1 e 2 non cambia, mentra a 3 sı´ .

Soluzione esercizio 55

a. $B(r) = \frac{r}{2c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$
$q = \frac{\Delta\Phi_B}{R}$
$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{V_0}{hR_0C}e^{-\frac{t}{R_0C}}$
$q = \frac{Nabr_2}{2c^2R}\frac{V_0}{R_0Ch}$
$Q = V_0/C\ ;\ q/Q = 11.5$

b. $\epsilon_0 \to \epsilon = \kappa\epsilon$
$j_s \to \kappa j_s \quad , \quad C \to \kappa C$
$q'/Q' = 1/\kappa \cdot q/Q = 2.3$

3.2 Onde E.M.

Esercizio 56

La radiazione solare cede alla superficie terrestre 2.2 $calorie/cm^2/minuto$ (la cosiddetta costante solare). Supponendo che l'onda EM sia piana e incida normalmente alla superficie terrestre, calcolare:

a. i valori massimi di E e B;

b. la pressione sulla superficie terrestre p.

Esercizio 57

La radiazione solare sulla superficie della terra vale 1532 W/m^2. Sapendo che la distanza media terra-sole $R_T = 149 \cdot 10^9\ m$, la massa del sole vale $M_s = 1.99 \cdot 10^{30}\ kg$, calcolare:

a. La potenza irradiata dal sole;

b. la pressione di radiazione sulla terra e il suo rapporto con la pressione atmosferica;

c. la dimensione di una vela solare, perfettamente riflettente, in grado di compensare l'attrazione gravitazionale per una astronave di massa $m = 1000\ kg$;

d. il rapporto tra la forza gravitazionale e la forza di pressione per una sferetta nera di dimensione a e densità ρ. Si calcoli il rapporto per $a = 3 \cdot 10^{-5}\ cm$ e $\rho = 2.5\ g/cm^3$.

Soluzione esercizio 56

a. $< S >= 1532\ W/m^2$
$|S| = \frac{|E \times B|}{\mu_0} = \frac{E \cdot B}{\mu_0} = c\epsilon_0 E^2$
$< |S| >= |S|/2 \quad , \quad E_0 = \sqrt{\frac{2<S>}{c\epsilon_0}} = 1.07\ kV/m$
$B_0 = E_0/c = 3.58 \cdot 10^{-6}\ T$

b. $< p >=< S > /c = 5 \cdot 10^{-6}\ N/m^2$

Soluzione esercizio 57

a. $L_\odot = 4\pi R^2 \Phi = 4.2 \cdot 10^{26}\ W$

b. $p_{rad} = \Phi/c = 5 \cdot 10^{-6}\ N/m^2$
$p_{rad}/p_{atm} = 5 \cdot 10^{-11}$

c. $F_p = 2Sp_{rad} = \frac{2SL}{4\pi R^2 c} \quad , \quad F_G = \frac{GM_\odot m}{R^2}$
$S = 2\pi G \frac{M_\odot mc}{L_\odot} = 6 \cdot 10^5\ m^2 = (770\ m)^2$

d. $F_p = p\pi a^2$
$\frac{F_p}{F_G} = \frac{3L_\odot}{16\pi ac\rho GM_\odot} = \frac{r_c}{a}$
$r_c = 1.6 \cdot 10^{-5}\ cm$

3.3 Circuiti RLC

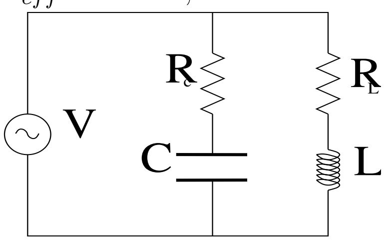
Esercizio 58

Circuito RLC in serie è alimentato con una *f.e.m.* alternata $V(t)$, $C = 1.5\,pF$, $L = 2\ mH$, $R = 150\ \Omega$. Mantenendo costante la frequenza di risonanza ω_r e tempo di decadimento γ del circuito, si sostituiscono i tre elementi del circuito. La nuova capacità è $C' = 0.75\ pF$.
Determinare:

a. L'
b. R'
c. Il rapporto tra la potenza assorbita dal circuito W e W' alla frequenza di risonanza.
d. Quanto vale questo rapporto al di fuori delle condizioni di risonanza?

Esercizio 59

Si consideri il circuito in figura: $R_L = R_C = 100\,\Omega$, $L = 10^{-3}\ H$, $C = 100\,nF$, $V_{eff} = 220\ V$, $\nu = 50\ Hz$.



Calcolare:

a. La frequenza di risonanza ω_R;
b. La potenza dissipata dal circuito;

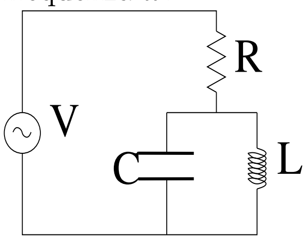
Esercizio 60

Un circuito RLC in serie è alimentato da una *f.e.m.* $V(t) = V_0 \cdot cos(\omega t)$, $V_0 = 10\ V$. Il $Q-$valore è $Q = 10$, e la larghezza della risonanza $\Delta\omega = 5 \cdot 10^4\ s$ e la potenza dissipata alla risonanza $\overline{P}_{ris} = 0.25\ W$.
Determinare:

a. Frequenza di risonanza ω_r;
b. I valori di R, L e C;
c. La frequanza ω alla quale la corrente è sfasata di $\pi/4$ rispetto alla tensione;
d. La potenza media dissipata nel caso precendente;

Esercizio 61

Si consideri il circuito RLC in figura, alimentato da una *f.e.m.* alternata con frequenza ω.



Determinare:

a. $I(t)$ in funzione di $V(t)$ e discuterne l'andamento;

b. La potenza dissipata dal circuito;

Esercizio 62

Si consideri un circuito RLC con i tre elementi posti in parallelo e alimentati da una *f.e.m.* alternata $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, $V_0 = 110\, V$, $\nu = 60\, Hz$, $R = 50\, \Omega$, $L = 2\ H$, $C = 1\ \mu F$.
Determinare:

a. La corrente che circola su R, C e L rispettivamente;

b. La corrente totale I e lo sfasamento rispetto a V;

c. La potenza dissipata;

Esercizio 63

Si consideri un circuito costituito da due circuiti LC accoppiati da una C, ovvero da una L o da una R
Determinare:

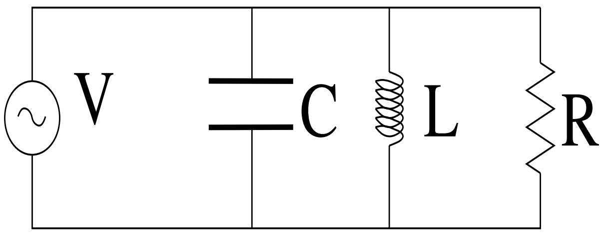
a. Le correnti che circolano su ciascuna maglia;

b. I modi normali del sistema;

c. La potenza dissipata;

Esercizio 64

Un circuito è costituito da un generatore di tensione sinusoidale, con ampiezza $V_0 = 12\ V$ e frequenza $\nu = 50\ Hz$, che alimenta un parallelo di una resistenza $R = 87\ \Omega$, una induttanza $L = 0.14\ H$, e un condensatore $C = 33\ \mu F$.



Calcolare:

a. l'impedenza complessa totale del circuito (modulo Z_0 e anomalia ϕ);
b. la pulsazione ω_r per la quale l'ampiezza della corrente è massima;
c. la massima carica Q_{max} presente sulle piastre del condensatore;
d. la corrente I_g erogata dal generatore nell'istante in cui la carica sul condensatore è massima;
e. la potenza media erogata dal generatore W_{gen};
f. la potenza dissipata dalla resistenza a $\nu = 50\ kHz$;
g. verificare che la soluzione per la corrente soddisfa il principio della conservazione della carica;
h. la massima/minima frequenza cui può lavorare il generatore se esso è in grado di fornire, al massimo, una corrente $I_{max} = 1\ A$ (*sugg.* per frequenza massima si faccia l'approssimazione che $\frac{1}{L\omega} \gg \omega C$ e, viceversa, per la frequenza minima di supponga che $\omega C \gg \frac{1}{L\omega}$;

Soluzione esercizio 58

a. $LC = L'C' \Rightarrow L' = 4\ mH$

b. $\tau = 1/\gamma \quad ; \quad \gamma = R/L \Rightarrow R' = RL'/L = 300\ \Omega$

c. Potenza dissipata solo da R $W = RI^2 = V^2/R$
$W'/W = \frac{V^2/2R}{V'^2/2R} = \frac{R}{R'} = 0.5$

Soluzione esercizio 59

a. $Y = 1/Z = (\frac{\omega^2 RC^2}{1+\omega^2 R^2 C^2} + \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2}) + i\omega(\frac{C}{1+\omega^2 R^2 C^2} - \frac{L}{R^2+\omega^2 L^2})$
$\omega = \omega_0 = 1/LC$

b. $< P(t) >= V_0/2Z \cdot \cos\phi = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\phi$

Soluzione esercizio 60

a. $\omega_r = \Delta\omega \cdot Q = 5 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$

b. $< P(t)_{ris} >= V_{eff} I_{eff} = V_0^2/2R$
$R = 200\ \Omega$ $L = R/\Delta\omega = 4\ mH$ $C = 1/(\omega_0^2 L) = 1\ nF$

c. $\phi = \arctan\frac{1/\omega C - \omega L}{R} = \pi/4$
$\omega_1 = 5 \cdot 10^4\ rad/s$ $\omega_2 < 0$

d. $< P >= \frac{V_0^2}{4R} = 0.125\ W$

Soluzione esercizio 61

a. $Z = R + i(\frac{1}{1/(\omega L) - \omega C})$
$I(t) = V/|Z| cos(\omega t - \phi)$
$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(1/(\omega L) - \omega C)^2}}$
$\tan\phi = \frac{\frac{1}{1/(\omega L) - \omega C}}{R}$
Antirisonanza per $\omega = 1/LC$

b. $< P(t) >= V_0^2/2|Z| \cdot \cos\phi$

Soluzione esercizio 62

a. $I_C(t) = i\omega C\epsilon(t) = -4.15 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t)\ A$
$I_L(t) = 1/(i\omega L)\epsilon(t) = 1.46 \cdot 10^{-1} \sin(\omega t)\ A$
$I_R(t) = \epsilon(t)/R = 2.2 \cos(\omega t)\ A$

b. $Y = 1/Z = 1/R + i(\omega C - 1/\omega L) = Y_0 e^{i\delta}$
$Y_0 = 2 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1}$
$\tan\delta = \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R} = 4.75 \cdot 10^{-2}$
$I_{tot} = 2.2\ A$

c. $< P(t) >= V_{eff} I_{eff} \cos\delta = 1.21 \cdot 10^2\ W$

Soluzione esercizio 63

a. $\omega_1^2 = 3/LC\ \omega_2^2 = 1/LC$

Soluzione esercizio 64

a. $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y_0 e^{i\phi} = 1.69 \cdot 10^{-2}[\Omega^{-1}]e^{-i0.82[rad]}$
$Z = \frac{1}{Y_0} e^{-i\phi} = 59.2[\Omega]e^{i0.82[rad]}$

b. $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 465\ s^{-1}$

c. $Q(t) = V_C(t)C$ massima quando é massima $V_C = V_{gen}$. $Q_{max} = VC = 3.96 \cdot 10^{-4}\ C$

d. $I_{gen} = I_R + I_C + I_L$: su L e C la corrente è sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione del generatore, mentre è in fase su R. La carica è massima quando la tensione è massima, quindi quando la corrente su L e C è nulla. Resta solo la corrente su R. $I_{tot} = I_R = V/R = 0.14\ A$

e. $W_{gen} = \frac{V I_{tot}}{2}\cos\phi = \frac{V^2}{2Z_0}\cos\phi = 0.83\ W$

f. $W_{gen} = \frac{V I_R}{2} = \frac{V^2}{2R} = 0.83\ W$

g. $I_{tot} = I_R + I_L + I_C = V\left(\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\sin(\omega t) + \frac{1}{R}\cos(\omega t)\right) = \frac{V}{Z_0}\cos(\omega t + \phi)$

h. Con le ipotesi fatte, ad alta frequenza, il modulo dell'ammettenza totale si approssima a $Y_0^{HF} \approx \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2\right)}$ e quindi la corrente totale risulta pari a: $VY_0^{HF} < I_{max}$, da cui si ricava $\omega_{max} < \frac{1}{C}\sqrt{\left(\frac{I_{max}}{V}\right)^2 - \frac{1}{R^2}} = 2.5 \cdot 10^3\ s^{-1}$

Analogamente, per basse frequenze $Y_0^{LF} \approx \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2\right)}$ e quindi $\omega_{min} > \frac{1}{L\sqrt{\left(\frac{I_{max}}{V}\right)^2 - \frac{1}{R^2}}} = 86\ s^{-1}$