# Capitolo 4

# Ottica

## 4.1 Rifrazione

### Esercizio 71

Un raggio di luce bianca orizzontale attraversa un prisma con indice di rifrazione $n$ e apertura $\alpha = 4\ deg$, colpisce uno specchio verticale e successivamente uno schermo. L'indice di rifrazione del prisma vale

| Colore | $\lambda$ ($nm$) | $n(\lambda)$ |
|---|---|---|
| Blu | 434 | 1.539 |
| Giallo | 589 | 1.517 |
| Rosso | 768 | 1.511 |

La distanza tra il prisma e lo specchio è $d = 1m$, mentre quella tra lo specchio e lo schermo è $d' = 4\ m$.
Determinare:

a. l'angolo che deve formare lo specchio con la verticale per avere un raggio uscente orizzontale per la luce gialla;
b. la dispersione della luce bianca sullo specchio;
c. la dispersione sullo schermo.

### Esercizio 72

Un sottile fascio di luce incide su un prisma con angoli $30 - 60 - 90°$ perpendicolarmente all'ipotenusa. L'indice di rifrazione del prisma è $n = 2.1$.
Calcolare:

a. le superfici e gli angoli di uscita della luce;
b. i rapporti delle intensità dei raggi uscenti rispetto a quello entrante.

## Esercizio 73

Si consideri un prisma isoscele fatto con un materiale con indice di rifrazione $n$:

a. Quale deve essere l'angolo di apertura perchè ogni raggio incidente su una faccia sia totalmente riflesso dall'altra faccia?

## Esercizio 74

Una larga piscina circolare ha una profondità $h = 2/3d$ dove $d = 84\ m$ è il diametro. Un osservatore è posto ad una distanza dal bordo della piscina ad una distanza pari alla altezza dal bordo stesso.

a. Quanto deve essere riempita d'acqua ($n = 4/3$) la piscina perchè l'osservatore riesca a vedere il centro della piscina?

---

**Soluzione esercizio 71**

a. Con l'approssimazione di angoli piccoli $\delta = \alpha(n-1) = 2.068°$ (Angolo uscita prisma rispetto orizzontale)
$\theta = \delta/2 = 1.034°$ (Angolo inclinazione specchio)

b. $\delta_{blue} = 3.763 \cdot 10^{-2}\ rad$ $\delta_{rosso} = 3.567 \cdot 10^{-2}\ rad$ $\Delta x_{specchio} = \Delta\delta \cdot d = 1.955\ mm$

c. $\Delta x_{schermo} = \Delta\delta \cdot (d + d_s) = 7.822\ mm$

**Soluzione esercizio 72**

a. $\theta_L = \arcsin(1/n) \approx 28.5°$ Luce incide su cateto maggiore con angolo $30° > \theta_L$, riflessione totale. Dopo riflessione su ipotenusa con $60° > \theta_L$, riflessione totale. Poi su cateto minore con 0°, quindi in parte esce e in parte viene riflessa. La parte riflessa fa il cammino all'indietro, sempre con riflessione totale, e esce da dove è entrata.
Se il primo cateto colpito è quello minore, il risultato non cambia.

b. Nella prima riflessione si ha: $T = \left(\frac{4n}{n+1}\right)^2 = 87.4\%$, $R = 1 - T = 12.6\%$. Nella seconda riflessione sul cateto, il raggio uscente ha intensità relativa $T \cdot T = 76.4\%$. Nell'ultima riflessione sull'ipotenusa, la parte uscente è $T \cdot R \cdot T = 9.6\%$. In totale esce il 98.6% della luce entrante, il rimanente ripete le stesse riflessioni.

**Soluzione esercizio 73**

a. Serve un po' di geometria...
$\theta_{1,2,3}$ sono angoli di incidenza sulla prima faccia, rifrazione dalla prima faccia, incidenza sulla seconda faccia, rispettivamente. Riflessione totale se $\theta_3 > \theta_L = \arcsin(1/n)$

- *primo caso:* il raggio di luce rifratto all'interno del prisma è dalla parte del vertice del prisma rispetto all'asse della prima faccia.
  $\theta_3 = \alpha - \theta_2 > \theta_L \quad , \quad \theta_2(max) = \theta_L \Rightarrow \alpha > 2\theta_L$
- *secondo caso:* raggio di luce rifratta è nel semipiano più lontano dal vertice rispetto alla normale alla prima faccia.
  $\theta_3 = \theta_2 + \alpha > \theta_L \quad , \quad \theta_2(min) = 0 \Rightarrow \alpha > \theta_L$

**Soluzione esercizio 74**

a. $x$ livello di acqua nella vasca, $\hat{r}$ angolo rifrazione, $\hat{\imath}$ angolo incidenza $d/2 = x\tan\hat{r} + (2d/3 - x)$ $x = d/6\frac{1}{1-\tan\hat{r}} = 37.4\ m$

## 4.2 Interferenza

### Esercizio 75

Due fori di Young in aria distano $d = 0.1\ mm$ e illuminano uno schermo a $L = 20\ cm$ con luce monocromatica: si osserva che i due max di ordine 10 distano tra loro $\Delta x_{\pm 10} = 24\ mm$.
Calcolare:

a. $\lambda$
b. $\Delta x$ delle frange luminose sullo schermo.
c. $\lambda'$ nel vuoto perchè la figura di interferenza non cambi rispetto all'aria, se tutto il sistema viene immerso in acqua ($n = 4/3$).

### Esercizio 76

Un interferometro di Young ha 3 fori con apertura $a << \lambda$ e separate rispettivamente da $d$, $3/2d$.
Calcolare, ponendo $F_0$ l'intensità a $\theta = 0$:

a. La posizione $\theta_m$ del primo massimo;
b. l'intensità del primo massimo rispetto a quello centrale;
c. l'intensità a $\theta_m/2$.

### Esercizio 77

Un'onda piana monocromatica $\lambda = 550\ nm$ incide perpendicolarmente su schermo opaco con due fenditure parallele. La figura di interferenza si forma su uno schermo posto sul piano focale di una lente con potere diottrico $P = 3\ dr$. Due frange successive distano $D = 5mm$.
Determinare:

a. La distanza tra le fenditure;
b. la larghezza delle fenditure, osservando che il massimo di ordine 8 non è visibile;
c. Davanti ad una fenditura si pone una lamina di spessore uniforme $50\ \mu m$ e le frange si spostano di 20 massimi.
Determinare l'indice di rifrazione del materiale.

### Esercizio 78

Una sorgente di luce monocromatica $\lambda = 504\ nm$ incide perpendicolarmente una lamina cuneiforme, con $n = 1.4$ e apertura $\alpha = 0.1\ rad$. Si osservano

frange chiare e scure parallele allo spigolo. La lunghezza della lamina è $L = 45mm$ .
Calcolare:

a. La distanza $x$ dallo spigolo delle prime tre frange scure;
b. idem per le chiare;
c. La frangia lungo lo spigolo è chiara o scura?
d. E quella all'altra estremità del cuneo?
e. Il numero totale di frange chiare e scure.

## Esercizio 79

Un ricevitore di onde radio è posto sulla riva di un lago ad una altezza $h = 30\ m$ s.l.l. e riceve segnali ad una $\lambda = 1m$ da una galassia lontana sia direttamente sia per riflessione su lago.
Calcolare:

a. Lo sfasamento $\delta$ dei due raggi in funzione dell'angolo $\alpha$ (altezza sull'orizzonte);
b. Per quale valore di $\alpha$ l'intensità è massima sul rivelatore.

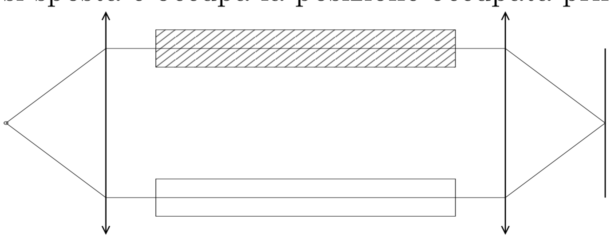
## Esercizio 80

Un film sottile di spessore $d = 300\ nm$, $n = 1.5$ è illuminato da luce bianca con incidenza normale.
Calcolare la lunghezza d'onda corrispondente alla colorazione dominante del film se osservato:

a. in riflessione;
b. in trasmissione.

## Esercizio 81

L'interferometro in figura è illuminato con luce monocromatica $\lambda = 612.2\ nm$: il raggi (paralleli) sono fatti passare per tubi di uguale lunghezza $l - 20\ cm$, inizialmente vuoti e si osservano un sistema di frange. Il tubo superiore viene quindi riempito con un gas e si osserva che la frangia centrale si sposta e occupa la posizione occupata prima dalla 98-esima frangia.



Calcolare:

a. l'indice di rifrazione $n$ del gas;
b. la minima $\Delta n$ osservabile.

### Esercizio 82

Un film di sapone verticale è illuminato da luce di sodio $\lambda = 589\ nm$. La parte superiore, osservata in riflessione, è nera, mentre si vedono 5 frange chiare in basso e il centro della $5^a$ frangia è sul bordo inferiore. L'indice di rifrazione dell'acqua saponata è $n = 1.33$.

a. Calcolare lo spessore del bordo inferiore e superiore.

### Esercizio 83

Una lente è coperta da un film per ridurre la riflessione. L'indice di rifrazione del film e della lente sono $n_f = 1.2$ e $n_l = 1.4$, rispettivamente. Si consideri luce ad una lunghezza d'onda $\lambda = 5000$ Å.
Calcolare:

a. Lo spessore minimo del film per minimizzare l'intensità della luce riflessa.
b. Quale dovrebbe essere $n_f$ perchè la riflessione sia la minima assoluta.
c. In quest'ultimo caso, la riflessione può essere ridotta a 0?

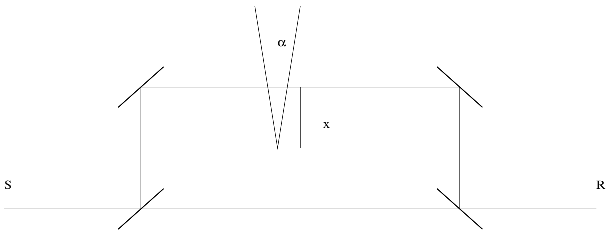
### Esercizio 84

Una sorgente di luce con $\lambda = 400\ nm$ illumina perpendicolarmente 2 lastre di vetro lunghe $l = 10\ cm$: le lastre sono a contatto ad un estremo e separata all'altro da un foglio di alluminio di spessore $s$. Osservo che i bordi sono scuri, e sono visibile 250 frange chiare.
Calcolare:

a. Lo spessore $s$;
b. La precisione sulla misura di $s$.

### Esercizio 85

L'interferometro in figura opera con luce quasi monocromatica $\lambda = 480\ nm$, $\Delta\lambda = 1\ nm$. I due specchi inferiori sono semi-riflettenti, mentre quelli superiori normali e distano $h$.




Calcolare:

a. Di quanto si deve variare $h$ per osservare due massimi successivi.
b. La massima distanza $h$ per avere interferenza.
c. Successivamente un cuneo sottile, con $\alpha = 2°$, $n = 1.3$, viene inserito nel cammino ottico superiore (si trascuri la deviazione del raggio stesso).
   Si calcoli la variazione di profondità $\Delta x$ per osservare due minimi successivi.

## Esercizio 86

Due antenne radio emettono onde sferiche a frequenza $\nu = 300\ MHz$ in fase, e distano $p = 30\ m$. Ad una distanza $d_1 = 1\ km$, formando un triangolo rettangolo di cateti $p$ e $d_1$ , c'è un ricevitore.

a. Calcolare $\Delta\phi$ delle onde sul ricevitore.
   A $d_2 = 2\ km$ dall'antenna più vicina, su prolungamento del cateto $d_1$ c'è un secondo ricevitore.
   Calcolare:
b. Il rapporto tra le intensità $I_1/I_2$;
c. Supponendo di mettere il tutto in un mezzo, quale deve essere la costante dielettrica $\epsilon_r$, per rendere nullo il segnale sul primo rivelatore.

## Esercizio 87

Un'onda piana monocromatica $\lambda = 550\ nm$ incide perpendicolarmente su schermo opaco con due fenditure parallele. La figura di interferenza si forma su uno schermo posto sul piano focale di una lente con potere diottrico $P = 3\ dr$. Due frange successive distano $D = 5mm$.
Determinare:

a. La distanza tra le fenditure;
b. la larghezza delle fenditure, osservando che il massimo di ordine 8 non è visibile;
c. Davanti ad una fenditura si pone una lamina di spessore uniforme 50 $\mu m$ e le frange si spostano di 20 massimi.

Determinare l'indice di rifrazione del materiale.

---

**Soluzione esercizio 75**

a. $\Delta x_{\pm 10} = 20L\frac{\lambda}{d}$ $\lambda = \frac{d}{20L}\Delta x_{\pm 10} = 6 \cdot 10^{-7}\ m$

b. $\Delta x = \frac{\lambda L}{d} = 1.2\ mm$

c. $\Delta x' = \frac{\lambda' L}{nd} = \frac{\lambda L}{d} = \Delta x$
$\lambda' = n\lambda = 798\ nm$

**Soluzione esercizio 76**

a. Risolvo se $E(\theta) = E + Ee^{i\delta} + Ee^{i\frac{5}{2}\delta}$ $\qquad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$
$I \propto |E^2| = E^2(3 + 2(\cos\delta + \cos\frac{3}{2}\delta + \cos\frac{5}{2}\delta))$
Massimo per $\delta = 4\pi$ $\theta_1 = \frac{2\lambda}{d}$

b. $I(\frac{\theta_1}{2}) = I(0)/9$

**Soluzione esercizio 77**

a. $\Delta z = f\Delta\theta = f\lambda/d$ quindi $d = f\lambda/\Delta z = 3.7\ mm$

b. Minimo di diffrazione coincide con massimo di interferenza di ordine 8. $\frac{\lambda}{L} = 8\frac{\lambda}{d}$, quindi $L = d/8 = 34\ \mu m$.

c. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)h = 20 \cdot 2\pi$, quindi $n = 1 + 20\frac{\lambda}{h} = 1.22$.

**Soluzione esercizio 78**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi n}{\lambda}2x\alpha + \pi$
Frange chiare se $\Delta\phi = 2k\pi$: $x = \frac{(2k+1)\lambda}{4\alpha n} = 0.9, \quad 2.7, \quad 4.5\ mm$

b. Frange scure se $\Delta\phi = (2k+1)\pi$: $x = \frac{k\lambda}{2\alpha n} = 0., \quad 1.8, \quad 3.6\ mm$

c. La frangia è scura

d. La frangia è scura $L/passo = 25$

e. Si vedono 26 scure e 25 frange chiare.

**Soluzione esercizio 79**

a. $\Delta\phi = -\frac{4\pi}{\lambda}h\sin\alpha + \pi$

b. $\sin\alpha_{max} = \frac{\lambda}{4h} = 0.48°$

**Soluzione esercizio 80**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}n(2d) + \pi$ $\lambda_{max} = \frac{4nd}{2k+1}$ nel range ottico solo $\lambda = 600\ nm$

b. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} n(2d)$ $\lambda_{max} = \frac{2nd}{k}$ nel range ottico solo $\lambda = 450\ nm$
Tuttavia, il coefficiente di riflessione è pari a $R = 4\%$ (e quello di trasmissione $T = 96\%$), quindi il raggio che viene riflesso internamente due volte risulta avere una intensità di circa 0.15% rispetto a quello trasmesso. La differenza di intensità è tale da non produrre (quasi) nessuna interferenza, quindi la luce trasmessa risulterà bianca come quella incidente. Nel caso di riflessione, entrambi i raggi vengono riflessi una volta, quindi hanno una intensità simile e pertanto si osserva l'interferenza.

**Soluzione esercizio 81**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} l(n-1) = N2\pi$ $n = 1 + N\lambda/l = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$
b. $\frac{2\pi}{\lambda} l(n_1 - n_2) = \pi$ $\Delta n = \frac{\lambda}{2l} = 1.53 \cdot 10^{-6}$

**Soluzione esercizio 82**

a. Nella parte superiore lo spessore non contribuisce allo sfasamento della luce diretta e riflessa: $d < \lambda/2$
Per la parte inferiore: $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2dn + \pi = 2k\pi \quad k = 5$ $d = \frac{9\lambda}{4n} = 9.96 \cdot 10^2\ nm = 1.0\ \mu m$

**Soluzione esercizio 83**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2dn = \pi$ $d = \frac{\lambda}{4n_1} = 0.104\ \mu m$
b. $R_1 = (\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2})^2 = 0.826$ $R_2 = 5.9 \cdot 10^{-3}$
Riflessione minima per $n_1 = \sqrt{n_0 n_2} = 1.18$
c. Riflessione non è nulla perchè non tutta la luce viene riflessa dalla seconda interfaccia, ma in parte $(R-1)$ viene trasmessa.

**Soluzione esercizio 84**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\frac{xs}{l} + \pi$ Scuro per $x = 0 \quad (k = 0)$ e $x = l \quad (k = 250)$
$s = \frac{k\lambda}{2} = 50\ \mu m$
b. $\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta k}{k} = 1/250 = 4 \cdot 10^{-3}$
$s = 50 \pm 0.2\ \mu m$

**Soluzione esercizio 85**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2h$ $\Delta h = \frac{\lambda}{2} = 240\ nm$

b. Tempo di coerenza della luce $\Delta t \Delta\omega \approx 1$ $\Delta t = \frac{2\pi\lambda}{\omega\Delta\lambda}$ $2h < \Delta x = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 0.115\ mm$

c. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\alpha(n-1) = 2\pi$ $\Delta d = \frac{\lambda}{\alpha(n-1)} = 45.7\ \mu m$

**Soluzione esercizio 86**

a. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{p^2}{2d_1} = 2.83\ rad$

b. $\Delta\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{p^2}{2d_2} = 81^\circ$ $R = \frac{(1+\cos\Delta\phi_1)d_2^2}{(1+\cos\Delta\phi_2)d_1^2} = 0.17$

c. $\lambda' = \lambda/n = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
$\epsilon_r = (\lambda/\lambda')^2 = 1.23$

**Soluzione esercizio 87**

## 4.3 Diffrazione

### Esercizio 88

I fari di un'automobile $D = 1.3\ m$, $\lambda = 500\ nm$, sono osservati da un osservatore la cui pupilla ha un diametro di $5\ mm$.

a. Calcolare la distanza massima per cui si distinguono i due fari $L$.
b. In queste condizioni, la separazione sulla retina (che dista $p =\sim 24\ mm$ dalla pupilla) dell'immagine dei due fari $x$.

### Esercizio 89

Un telescopio ha una lente principale con apertura pari a $D = 25\ cm$ e focale $f = 60\ cm$. Esso viene usato per osservare una coppia di stelle, angolarmente molto vicine tra loro.

a. Nell'ipotesi che la luce delle stelle sia rossa, si calcoli la minima distanza angolare $\alpha$ per poterle distinguere.

### Esercizio 90

Un'onda piana monocromatica $\lambda = .55\ \mu m$ incide perpendicolarmente uno schermo opaco su cui sono presenti due fenditure parallele. La figura di interferenza si forma su uno schermo, posto sul piano focale di una lente con potere diottrico $P = 3$ *diottrie*. Si osserva che due frange chiare successive distano $d = 5\ mm$.
Calcolare:

a. la distanza $l$ tra le fenditure;
b. la larghezza della singola fenditura, osservando che il massimo di ordine 8 non risulta visibile;
c. Davanti ad una delle fenditure si pone una lamina con spessore $h = 50\ \mu m$, e si osserva che le frange si spostano di 20 massimi. Calcolare l'indice di rifrazione $n$ del materiale.

### Esercizio 91

Un fascio di luce monocromatica colpisce normalmente una fenditura larga $w = 5\lambda$. Si vuole far sì che la luce che attraversa la metà superiore della fenditura sia abbia un ritardo di fase pari a $\pi$ rispetto alla metà inferiore.

a. Come si può fare?
b. Come risulta la figura di interferenza risultante?

---

**Soluzione esercizio 88**

a. La pupilla viene investita da due fronti d'onda piani e si comporta come un foro circolare diffusore. L'immagine di ogni fascio luminoso è una figura di diffrazione $\lambda \ll d$. Il primo mimino di diffrazione si ha ad un angolo $\theta = 1.22\frac{\lambda}{d}$. Le due figure di diffrazione si possono dire risolte se il massimo del secondo disco coincide (o è più lontano) con il primo minimo del primo disco: criterio del (lord) Rayleigh.
Quindi i due fari risultano risolti, considerando solo la diffrazione della pupilla, se $\frac{D}{L} > 1.22\frac{\lambda}{d}$, quindi se $L < 10.7\ km$.
Questo risultato è in contrasto con l'esperienza: una prima osservazione è che, data la curvatura terrestre, la distanza dell'orizzonte per una persona i cui occhi siano a circa 1.70 $cm$ da terra risulta essere circa 5 $km$, inferiore alla distanza di risoluzione dei fari secondo il calcolo di prima. Quindi, in una pianura, non appena i fari sono visibili, sono anche risolti: il che è accade.
Il fattore che abbiamo trascurato è la dimensione dei sensori (coni e bastoncelli) sulla retina.

b. La distanza sulla retina delle immagini dei due fari, o meglio, del centro delle rispettive figure di diffrazione, risulta $x = \theta p = \frac{D}{L}$.
Questa va confrontata con la dimensione dei sensori, che è circa di 5 $\mu m$. Perchè le due immagini risultino distinte, devono colpire due sensori non adiacenti, quindi devono distare circa $x > 10\ \mu m$. Il che porta ad un angolo minimo di risoluzione $\theta_m = \frac{x}{p} \sim 4 \cdot 10^{-4}\ rad$.
Con questa risoluzione angolare, la distanza minima dovrà essere circa $L \sim 3.2\ km$ che è un valore più ragionevole.
Si poteva risalire all'angolo minimo di risoluzione, osservando che alla distanza di visione distinta ($L_d \sim 20\ cm$), l'occhio normale è in gradi di risolvere circa un decimo di $mm$. $\theta = \frac{0.1}{200} \sim 5 \cdot 10^{-4}\ rad$, in buon accordo con i numeri precedenti.

**Soluzione esercizio 89**

a. La lente è un foro circolare investito da una onda piana, che quindi produce una immagine di diffrazione circolare di raggio $r = f\Delta\theta = f \cdot 1.22\lambda/D \approx= 2\ \mu m$, stimando $\lambda \approx 650\ nm$.
Il minimo $\alpha$ risolvibile è quindi $\alpha > \Delta\theta = 3 \cdot 10^{-6}\ rad$ posto che i sensori sullo schermo siano più piccoli di $\sim 1\mu m$.

**Soluzione esercizio 90**

a. $D = \frac{\lambda}{Pl}$ quindi $l = \frac{\lambda}{PD} = 3.7\ mm$
b. Minimo di diffrazione corrisponde all'ottavo massimo di interferenza: $\lambda/L = 8\lambda/d$, $L = d/8 = 34\ \mu m$
c. $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}h(n-1) = 20 \cdot 2\pi$, quindi $n = 1 + 20\lambda/h = 1.22$.

**Soluzione esercizio 91**

a. Per esempio mettendo una lamina di spessore $d = \frac{\lambda}{2(n-1)}$ davanti a metà fenditura.
b. Posso considerarlo come due fori di Young, distanti $w/2$ e larghi $w/2$, con uno sfasamento ulteriore di $\pi$ tra il primo e il secondo.
$I(\theta) = I_0 \cdot (\sin^2\phi) \cdot \frac{\sin^2\phi}{\phi^2}$ con $\phi = \frac{w\pi}{2\lambda}\sin\theta$

## 4.4 Reticoli

### Esercizio 92

Un fascio piano di onde *e.m.* con frequenza $\nu = 10^{11}\ Hz$ incide su uno schermo conduttore piano su cui sono praticate 5 fenditure parallele e lunghe, di larghezza $a = 6\ mm$ e passo $p = 18\ mm$.
Calcolare:

a. quanti massimi di segnale sono presento oltre a quello a $\theta = 0$;
b. la posizione di questi massimi;
c. quanto deve essere largo un rivelatore per raccogliere tutta l'energia del primo massimo se la distanza tra le fenditure e il rivelatore è $L = 1\ m$

### Esercizio 93

Luce piana, monocromatica, $\lambda = 0.6\ \mu m$ colpisce un reticolo con $N = 5$ fenditure parallele e lunghe, con passo $p = 9\ \mu m$ e larghezza $a << \lambda$. A distanza di 1 $m$ è posto una lente con potere $P = 2\ dt$, e si osserva la figura di interferenza di Fraunhofer su schermo posto sul piano focale della lente.
Calcolare:

a. La distanza sullo schermo tra il massimo principale e quello di ordine 1;
b. Il numero di max secondari compresi tra due max primari;
c. Sposto lo schermo per osservare l'immagine delle fenditure: quale deve essere la distanza tra queste immagini?

### Esercizio 94

Un fascio di luce con $\lambda = 514.5\ nm$ (Argon) incide normalmente su un reticolo con $N = 6000\ righe/cm$.
Calcolare:

a. Il più elevato ordine di massimo principale;
b. La distanza tra il max 0 e max 1 se l'immagine è focalizzata con lente con $f = 12\ cm$;
c. La dimensione minima del reticolo per risolvere nel max del primo ordine il doppietto $\lambda = 514.5 \div 514.6\ nm$

### Esercizio 95

Un reticolo con $N = 8000$ fenditure di larghezza $a = 3\ \mu m$ e passo $p = 8\ \mu m$

viene illuminato con luce monocromatica e normale $\lambda = 0.4\ \mu m$. La luce viene osservata su piano focale di una lente.
Calcolare:

a. Il numero di massimi principali;
b. L'intensità del max di ordine 4 rispetto a quello di ordine 0;
c. Il minimo diametro della lente per non aumentare la larghezza dei massimi.

## Esercizio 96

Un reticolo è illuminato da luce $\lambda = 5550$ Ånormale e osservata con una lente. Si vedono massimi corrispondenti a $\sin\theta = 0.2,\ 0.4,\ 0.6$. L'intensità della $3^a$ riga è 25% di quella centrale.
Calcolare:

a. Il passo del reticolo;
b. La larghezza minima delle fenditure;
c. La dispersione massima $D = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$
d. La max separazione angolare per il doppietto del sodio $\lambda = 5890,\ 5896$ Å.

## Esercizio 97

Un reticolo con 5000 fenditure per cm, larghezza $L = 5\ cm$ è illuminato con luce $\lambda = 0.55\ \mu m$ in condizioni di Fraunhofer.
Calcolare:

a. Il numero di massimi principali;
b. la minima larghezza delle fenditure per cui il max di ordine più elevato è assente;
c. La distanza tra il max di ordine 0 e 1 se visto con lente con $P = 3\ dr$;
d. Il minimo $\Delta\lambda$ risolvibile.

**Soluzione esercizio 92**

a. Il conduttore assorbe le onde *e.m.*, quindi siamo in presenza di un reticolo formato da 5 fenditure. La posizione dei massimi principali di interferenza è data da:

$$\sin\theta_n = n\frac{\lambda}{p}$$

Il più grande ordine di massimi principali si ottiene forzando il $\sin\theta_n < 1$, il che porge: $n_{max} = int\frac{p}{\lambda}$. Nel nostro caso $\frac{p}{\lambda} = 6$, quindi il massimo ordine visibile sarebbe il numero 6, per un totale di $(6 \cdot 2) + 1 = 13$ massimi, per tenere conto di quelli a destra e a sinistra $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ e del massimo centrale. Il massimo principale di ordine 6 si ha per $\sin\theta_6 = 1$, il che non è molto fisico, visto che corrisponderebbe a $\theta_6 = 90°$.
Occorre poi tenere conto dei minimi di diffrazione, ossia del cosiddetto fattore di forma. Essi sono presenti per:

$$\sin\theta_m = m\frac{\lambda}{a}$$

e, nel caso coincidano con i massimi di interferenza, rendono invisibili questi ultimi. Occorre perciò verificare se vi siano coppie di interi con segno $n, m$, con $n < 6$ tali da verificare $\sin\theta_m = \sin\theta_n$, ovvero tali che:

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{p} = 3$$

Si trova così che i minimi di diffrazione di ordine $\pm 1$ e $\pm 2$ corrispondono ai massimi di interferenza di ordine $\pm 3$ e $\pm 6$, rispettivamente.
Quindi i massimi effettivamente visibili sono $((6 - 2) \cdot 2) + 1 = 9$. Per inciso, il massimi di ordine $\pm 6$ non risulta comunque visibile perchè sovrapposto ad un minimo di diffrazione, togliendoci quindi dall'imbarazzo se dichiararlo visibile o meno (non sarebbe visibile).

b. La posizione dei massimi è: $x_n = L \cdot \tan\theta_n = L \tan \arcsin(\frac{n\lambda}{p})$ dove l'approssimazione per angoli piccoli non vale nel nostro caso (tranne che per $n = \pm 1$).

| $n$ | $x_{\pm n}$ |
|---|---|
| 1 | $\pm 16.9$ *cm* |
| 2 | $\pm 35.3$ *cm* |
| 4 | $\pm 89.4$ *cm* |
| 5 | $\pm 150.8$ *cm* |

c. La distanza tra un massimo principale e il minimo immediatamente adiacente è pari a $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Np}$, ed equivale alla semi-larghezza del massimo principale. Per raccogliere tutta la luce ho quindi bisogno di un rivelatore largo:

$$\Delta z_{riv} = 2 \cdot L \frac{\lambda}{Np} = 6.67\ cm$$

.

**Soluzione esercizio 93**

a. Massimi principali sono: $x_n = f \cdot \sin\theta_n = f\frac{n\lambda}{p}$, quindi $\Delta x_{0,1} = f\frac{\lambda}{p} = 3.3\ cm$

b. Tra due massimi principali vi sono $N - 1$ minimi e $N - 2$ massimi secondari.

c. Per osservare sullo schermo l'immagine delle fenditure $\frac{1}{p_L} + \frac{1}{q_L} = \frac{1}{f_L}$ che porge: $q_L = 1\ m$.
La distanza tra le immagini delle due fenditure sullo schermo è quella originale moltiplicata per l'ingrandimento: $y' = \frac{q}{p}y = y$

**Soluzione esercizio 94**

a. Il passo è $p = 1/N = 1.67\ \mu m$, $n_{max} < \frac{p}{\lambda} = 3.23$, quindi il massimo ordine di massimi principali e' il terzo.

b. La posizione del massimo centrale è $x_0 = 0$. Quella del massimo di ordine $n$ è $x_n = nf\lambda/p$ (nell'approssimazione di angoli piccoli). Quindi $x_1 = 3.7\ cm$.

c. Il potere risolutivo del reticolo è $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < nN$, dove $N$ è il numero totale di fenditure $N = N_l \cdot D$, al primo ordine risulta quindi $D > \frac{\lambda}{N_l \Delta\lambda} = .875\ cm$. Se invece avessi considerato il terzo massimo principale, dove il potere risolutivo è massimo, la larghezza sarebbe stata un terzo $D_3 = .286\ cm$.

**Soluzione esercizio 95**

a. $n_{max} < d/\lambda = 20$, quindi ci sono $20 \cdot 2 + 1 = 41$ massimi principali di interferenza. Si deve tenere conto anche del fattore di forma, la diffrazione della singola fenditura, che ha dei minimi in corrispondenza a $\sin\theta_m = m\lambda/a$. Se questi corrispondono ai massimi di interferenza, allora questi ultimi non sono visibili. Ciò avviene se $n\lambda/p = m\lambda/a$ cioè se $\frac{n}{m} = \frac{8}{3}$, e quindi per $(m, n) = \pm(3, 8), \pm(6, 16)$. Quindi ci sono $41 - 4 = 37$ massimi visibili.

b. $I_4/I_0 = \frac{\sin^2 \Phi_4}{\Phi_4^2}$ dove $\Phi_4 = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta_4 = \frac{\pi a}{d}$. Quindi $I_4/I_0 = 0.045$

c. La larghezza angolare del massimo principale è $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$. La risoluzione della lente non deve essere superiore a tale larghezza angolare, quindi: $1.22\frac{\lambda}{D} < \frac{\lambda}{Nd}$, cioè $D > 1.22Nd = 7.8\ cm$

**Soluzione esercizio 96**

a. $\sin\theta_n^{max} = n\frac{\lambda}{p}$ quindi, considerando il primo massimo, $p = \lambda/0.2 = 2.78\ \mu m$.

b. $\frac{I_3}{I_0} = \frac{\sin^2(frac3\pi ap)}{(frac3\pi ap)^2} = 0.25$. Risolvendo numericamente l'equazione, si ottiene $a/p \approx .2$, quindi $a \approx 0.556\ \mu m$

c. La dispersione di ottiene derivando la relazione $\sin\theta = n\lambda/p$ e si ottiene $D = \left(\left(\frac{p}{n}\right)^2 - \lambda^2\right)^{-1/2}$, che, per i valori del problema, e all'ordine 3 (il quarto ha un'intensità di solo il 4% quindi poco visibile) $D_3 = 1.39\ rad/\mu m$

d. $\Delta\theta = D_3 \cdot \Delta\lambda = 8.3 \cdot 10^{-4}\ rad.$

**Soluzione esercizio 97**

a. $n_{max} < p/\lambda = 3$, quindi ho $3 \cdot 2 + 1 = 7$ massimi.

b. Minimi di diffrazione $\sin\theta_3 = 3\lambda/p = \lambda/a$, quindi $a = p/3 = 0.67\ \mu m$

c. $\Delta x = \frac{\lambda}{pP} = 9\ cm$

d. considero il max di ordine 2 (il più elevato visibile), $\Delta\lambda > \frac{\lambda}{2nL} = 1.1 \cdot 10^{-5}\ \mu m$

## 4.5 Polarizzazione

### Esercizio 98

Un reticolo con $N$ fenditure orizzontali, larghe $a$ e con passo $p$, è posto perpendicolarmente a superficie di un liquido con $n = 2.0$. Il reticolo è colpito normalmente alla sua superficie da onda piana $\lambda = 0.6\ \mu m$. Si osserva che la luce del massimo principale di ordine 3, riflessa dal liquido, è polarizzata linearmente.
Determinare:

a. Il numero dei massimi principali;
b. Il minimo valore di $a$ per cui il massimo principale di ordine più grande non è visibile;
c. Il numero di massimi principali se il reticolo è immerso in un liquido con $n = 2$ e illuminato con la stessa $\nu$.

### Esercizio 99

Un sottile fascio di luce non polarizzata monocromatica, con intensità $I_0 = 1.2\ W/m^2$ si propaga lungo l'asse $x$ e attraversa nell'ordine:

- un polarizzatore lineare con asse ottico $\alpha$ lungo $y$;
- una lamina di quarzo di spessore $d = 0.018\ mm$, $n_0 = 1.5442$ $n_s = 1.5533$ e asse ottico parallelo a asse $z$;
- un secondo polarizzatore lineare con asse ottico che può ruotare liberamente.

Si osserva che l'intensità del fasci emergente dal sistema non dipende dall'orientamento dell'asse ottico del secondo polarizzatore. Determinare:

a. la lunghezza d'onda $\lambda$ della luce incidente;
b. l'angolo $\alpha$;
c. l'intensità della luce $I_1$ dopo il primo polaroid;
d. l'intensità della luce $I_2$ dopo il quarzo;
e. l'intensità della luce $I_3$ dopo il secondo polaroid;

### Esercizio 100

Una sorgente non polarizzata emette luce ad una lunghezza d'onda $\lambda = 550\ nm$ e illumina due fori di Young di larghezza $D = 1\ mm$ e distanti tra loro $d = 5\ mm$. Calcolare:

a. la posizione del massimo di terzo ordine su uno schermo a distanza $l = 10\ m$;

b. il rapporto tra l'intensità del massimo di terzo ordine rispetto a quello principale

Successivamente si pongono due polaroid $P_1$ e $P_2$ dietro alle due fenditure. Discutere come cambia la figura nei seguenti casi:

c. l'asse ottico di $P_1$ è parallelo a quello di $P_2$;

d. gli assi ottici di $P_1$ e $P_2$ sono perpendicolari;

e. si calcoli inoltre quanto vale il rapporto di cui al punto 2 nei due casi.

## Esercizio 101

Una cella di lunghezza $l = 1\ cm$ contiene una soluzione acquosa di molecole organiche ed ha indice di rifrazione $n_{sx}$ e $n_{dx}$ per luce polarizzata circolarmente a sinistra e a destra, rispettivamente: $(n_{sx} - n_{dx}) = 2 \cdot 10^{-5}$. Un fascio di luce polarizzata linearmente con $\lambda = 550\ nm$ entra nella cella.

a. Discutere lo stato di polarizzazione della luce uscente.

## Esercizio 102

E' disponibile in commercio un film costituito da un polarizzatore lineare e una lamina a $\lambda/4$ in successione, con assi ottici a $\pi/4$ tra loro. Si discuta:

a. l'effetto di tale film su un raggio di luce non polarizzata se viene attraversato prima il polarizzatore e poi la lamina in termini sia di intensità che di stato di polarizzazione;

b. lo stesso se il film è rovesciato, e quindi viene attraversata prima la lamina e poi il polaroid;

c. come si può fare a capire il verso del film?

## Esercizio 103

Quattro polaroid perfetti, ciascuno con asse ottico ruotato di 30° rispetto al precedente, sono posti in successione e illuminati con un raggio di luce non polarizzato.

a. Calcolare l'intensità della luce rispetto a quella incidente dopo ciascun polaroid.

b. Cosa succede se tolgo i polarizzatori intermedi (numero 2 e 3)?

---

**Soluzione esercizio 98**

a. La luce del massimo di ordine 3 incide la superficie del liquido ad un angolo corrispondente all'angolo di Brewster, diventando così' polarizzata.
$$\theta_3 = \arctan\frac{1}{n} = 26.6°$$
Da cui si ricava il passo del reticolo: $p = \frac{3\lambda}{\sin\theta_3} = 4\ \mu m$
Il massimo ordine di massimi è: $n_{max} < \frac{p}{\lambda} = 6.67$ e il numero totale di massimi principali: $N_{max} = 2n_{max} + 1 = 13$.

b. Il massimo di ordine più elevato è il 6: perchè risulti non visibile deve coincidere con il primo minimo di diffrazione della singola fenditura. $\sin\theta_m = \frac{\lambda}{a} = \sin\theta_6 = \frac{6\lambda}{p} \quad a = \frac{p}{6} = 0.67\ \mu m$

c. Se cambia il mezzo in cui il sistema è immerso, la lunghezza d'onda della luce incidente diventa $\lambda' = \lambda/n$. Il massimo ordine di massimi diventa quindi: $n'_{max} < \frac{p}{\lambda'} = 13.3$, e quindi il numero totale di massimi principali $N'_{max} = 2n'_{max} + 1 = 27$.

**Soluzione esercizio 99**

a. La luce che emerge dalla lamina deve essere polarizzata circolarmente: dato che quella dopo il primo polarizzatore è polarizzata linearmente, la lamina deve introdurre un ritardo di $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}\ (\frac{\lambda}{4})$ per la $\lambda$ incidente.
$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} = d(n_s - n_o)\frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = 4d(n_s - n_o) = 6.55 \cdot 10^{-7}\ m$

b. Perchè la luce diventi polarizzata circolarmente dopo la lamina, il suo asse ottico deve essere a 45° rispetto alla direzione della polarizzazione lineare entrante, quindi $\alpha = 45°$.

c. Il polaroid non fa passare la componente della luce perpendicolare all'asse ottico: $I_1 \propto (E_0^y)^2$, $I_0 \propto (E_0^y)^2 + (E_0^z)^2$. Visto che $E_0^y = E_0^z$, $I_1 = I_0/2 = 0.6\ W/m^2$

d. La lamina introduce un ritardo di fase tra il raggio ordinario e quello straordinario, ma non assorbe (idealmente): $I_2 = I_1 = I_0/2 = 0.6\ W/m^2$

e. $I_3 = I_2/2 = I_0/4 = 0.3\ W/m^2$

**Soluzione esercizio 100**

a. L'angolo del terzo massimo è: $\sin\theta_3 = \frac{3\lambda}{d}$. Quindi la posizione del massimo sullo schermo è $x_3 = l\theta_3 = 3.3\ mm$. Si noti che siamo in condizioni di Fraunhofer.
b. L'intensità dei massimi principali dipende solo dal fattore di forma del reticolo, non da quello di struttura.
$R_3 = \frac{\sin^2\Phi_3}{\Phi_3^2} = 0.25 \quad , \quad \Phi_3 = \pi\frac{D}{\lambda}\sin\theta_3$
c. La figura di interferenza non cambia. Se la sorgente rimane la stessa, allora l'intensità delle fenditure si riduce a metà e in conseguenza l'intensità dei massimi principali si riduce a 1/4 rispetto al caso precedente.
d. Non c'e' più alcuna figura di interferenza. Il campo elettrico della luce della prima fenditura è sempre perpendicolare a quello della seconda. In questo modo l'intensità sullo schermo risulta essere:
$I \propto < E_{tot}^2 > = < (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 > = < \vec{E}_1^{\,2} + \vec{E}_2^{\,2} > = < E_1^2 + E_2^2 >$
Cioè non è più presente il termine del doppio prodotto $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$, responsabile dell'interferenza, poichè $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$.
e. Il rapporto non cambia, poichè dipende solo dal fattore di forma, che rimane identico, e non da quello di struttura.

**Soluzione esercizio 101**

a. Scomponiamo la luce entrante in due componenti: una polarizzata circolarmente destra e una sinistra. La cella farà ritardare una componente rispetto all'altra di una fase $\Delta phi = d(n_s - n_d)\frac{2\pi}{\lambda}$

$$\begin{cases} E_x &= E_{0x}\cos(\omega t - kz) &= \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ E_y &= 0 &= \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) - \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

Dove si possono riconoscere le due componenti circolare destra ($E_x \propto +\cos\phi \quad E_y \propto +\sin\phi$) e sinistra ($E_x \propto +\cos\phi \quad E_y \propto -\sin\phi$).
Dopo la cella, il campo elettrico ha la forma $E' = E_{dx} + E_{sx}(\phi = \phi + \Delta\phi)$, dove la componente sinistra ha subito un ritardo di fase $\Delta\phi$

$$\begin{cases} E'_x &= \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) + \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz + \Delta\phi) \\ E'_y &= \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) - \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz + \Delta\phi) \end{cases}$$

E' possibile dimostrare che la polarizzazione all'uscita continua ad essere lineare, ma con un asse ruotato rispetto a quella entrante di un angolo $\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \tan\frac{\Delta\phi}{2}$. Il conto trigonometrico è piuttosto noioso ma si può semplificare scegliendo un istante $t$ per cui $\omega t - kz = 0$ e si ottiene:

$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-\sin\phi}{1+\cos\phi} = -0.11\ rad$

**Soluzione esercizio 102**

a. Consideriamo il verso per cui il polaroid si trova prima della lamina. Il polaroid dimezza l'intensità luminosa e polarizza la luce lungo il suo asse ottico. Successivamente la lamina fa diventare circolare la polarizzazione.
Quindi la luce esce polarizzata circolarmente e con intensità dimezzata.

b. Nel caso opposto, la lamina non ha alcun effetto sulla luce (non polarizzata) incidente, nè in termini di intensità ne di polarizzazione. Successivamente il polaroid rende la luce polarizzata linearmente e riduce a metà l'intensità.
Quindi luce esce polarizzata linearmente e con intensità dimezzata.

c. Se abbiamo a disposizione un secondo polaroid, è facile controllare se la luce uscente ha intensità uniforme al ruotare dell'asse ottico dell'analizzatore (caso a)) oppure no (caso b) ).
Senza un analizzatore, si può far riflettere la luce uscente da uno specchio e farla passare di nuovo attraverso il nostro film.
Nel caso a), la luce riflessa dallo specchio risulta essere ancora polarizzata circolarmente, ma con verso opposto. La lamina a $\lambda/4$ la rende di nuovo polarizzata linearmente, ma con asse perpendicolare rispetto a prima e successivamente il polarizzatore, che é ortogonale, non fa passare nulla. Quindi non si vede luce riflessa.
Nel caso b), la luce polarizzata linearmente resta tale anche dopo la riflessione, passa senza variazioni attraverso il polarizzatore e quindi viene resa polarizzata circolarmente dalla lamina. Quindi si vede luce, polarizzata circolarmente, e con intensità pari a metà di quella entrante.

**Soluzione esercizio 103**

a. $E^2 = E_\perp^2 + E_\parallel^2$ e $E_\perp^2 = E_\parallel^2$ dato che la luce incidente è non polarizzata (si intendono i valori mediati nel tempo)

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$\vec{E}_1 = E_{2\perp}\hat{\perp} + E_{2\parallel}\hat{\parallel} = E_1\cos\alpha\hat{\perp} + E_1\cos\alpha\hat{\parallel}$ dove $\alpha = 30°$. La componente $\perp$ non passa attraverso il polarizzatore: $E_2^2 = E_1^2\cos^2\alpha$, quindi

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha$$

.

Analogamente:

$$I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^4 \alpha$$

$$I_4 = \frac{I_0}{2} \cos^6 \alpha = 0.21\ I_0$$

b. Se i polarizzatori centrali non ci sono, l'angolo tra i due rimanenti (primo e quarto) risulta essere di 90°, quindi non passa luce dopo l'ultimo polaroid.

## 4.6 Lenti

### Esercizio 104

Due lenti biconvesse sono posizionate lungo il cammino ottico di un fascio di luce, separate da una distanza $d$. Il fascio di luce è parallelo e esce parallelo dopo le due lenti. Se si sposta la seconda lente di $a$ si forma una immagine ad una distanza $b$ da essa. Noto il raggio di curvatura delle lenti $R = 30\ cm$, $a = 10\ cm$, $b = 15\ cm$ e $d = 30\ cm$, determinare:

a. L'indice di rifrazione $n$ della seconda lente;
b. la distanza focale $f$ della prima lente.

### Esercizio 105

La distanza focale di un microscopio è 5 $mm$, quella dell'oculare 48 $mm$. Un oggetto è posto ad una distanza dall'obbiettivo pari a 5.1 $mm$: ricordando che per un osservatore la "visione distinta" avviene per una distanza di 240 $mm$, calcolare:

a. la lunghezza del microscopio;
b. l'ingrandimento dell'oggetto.

### Esercizio 106

Uno specchio sferico concavo circolare ha un diametro $d = 30\ cm$ e freccia $f = 1.5\ cm$, e riflette un oggetto posto a 4 $m$ dalla sua sperficie.

a. Dove si forma l'immagine?
b. E' reale o virtuale?

### Esercizio 107

Si vuole proiettare l'immagine di un oggetto su uno schermo distante 3.20 $m$. Si hanno a disposizione tre diverse lenti, di focale, rispettivamente $f = 95,\ 80,\ 45\ cm$.

a. Come si possono posizionare le lenti?

### Esercizio 108

Una sorgente luminosa si trova tra uno specchio e uno schermo paralleli.

a. Trovare la distanza dallo specchio per cui l'illuminazione dello schermo diventi $(m/n)$ volte quella senza specchio.

### Esercizio 109

Un oggetto si trova ad una distanza $D$ da uno schermo. Si vuole proiettare l'immagine dell'oggetto sullo schermo ingrandita di un fattore $I$.

a. Che lente devo usare, e dove deve essere messa?

## Esercizio 110

Un pesce si trova ad una profondità di $p = 40$ *cm* sotto la superficie di un lago ($n = 1.33$) ed è osservato da una lente convergente con focale $f = 400$ *cm* che si trova $d = 20$ *cm* sopra la superficie del lago. Determinare:

a. Dove è osservata l'immagine del pesce (che si assuma su asse ottico della lente)
b. Quale è l'ingrandimento con cui si vede il pesce?

## Esercizio 111

L'indice di rifrazione può essere aumentato diffondendo impurità in un mezzo trasparente: è possibile in questo modo costruire lenti di spessore constante.

a. Si consideri un disco di raggio $a$ e spessore $d$, trovare $n(r)$ per ottenere una lente di focale F. Porre $n(0) = n_0$.

## Esercizio 112

Un oggetto lungo 5 *mm* è posto a 50 *cm* da una lente di una macchina fotografica, sull'asse ottico. L'immagine è focalizzata sulla pellicola ed è lunga 1 *mm*. Se la pellicola viene spostata indietro di 1 *cm*, l'immagine si sfocalizza di 1 *mm* (Cioè l'immagine di un punto luminoso diventa larga 1 *mm*).

a. Calcolare il rapporto focale $F$ della lente ($F = f/D$, $D$ larghezza lente).

## Esercizio 113

Un uomo di di 55 anni è in grado di mettere a fuoco immagini poste tra 100 e 300 *cm*. Si consideri l'occhio come un sistema ottico formato da una lente convergente con focale variabile (cristallino) posto a 2 *cm* dallo schermo (retina).
Determinare:

a. la lunghezza focale del cristallino al punto lontano;
b. quella del punto vicino;
c. la lunghezza focale nella parte inferiore delle sue lenti bifocale per mettere a fuoco un punto distante 25 *cm*;

d. perchè è necessario che le lenti siano bifocali.

### Esercizio 114

In ambito astronomico è stato proposto uno specchio parabolico ottenuto ruotando mercurio (liquido) attorno ad un asse.
Determinare:

a. la forma dello specchio che si ottiene in questo modo: l'equazione della superficie e l'equazione ottica dello specchio;
b. la velocità angolare cui si deve ruotare il mercurio per avere una distanza focale di 10 $cm$.

### Esercizio 115

Uno specchio sferico orizzontale focalizza luce parassiale (prossima all'asse e parallela) ad una distanza di 20 $cm$. Si riempie la concavità dello specchio con acqua ($n = 4/3$) e si illumina il sitema dall'alto attraverso un forellino praticato su uon scehrmo pure orizzontale.

a. Determinare la distanza alla quale si deve porre lo schermo forato perchè l'immagine sia a fuoco sullo schermo stesso (autocollimazione).

### Esercizio 116

Due vetri di orologio identici (concavo-convessi con uguale curvature e quindi a spessore costante) sono incollati tra loro al bordo e uno dei due è riflettente dalla parte interna. In condizioni di autocollimazione (vedi problema precedente) il fuoco è ottenuto a 20 $cm$.

a. Determinare la distanza $L$ per ottenere autocollimazione se lo spazio tra i due vetri è riempito di acqua ($n = 4/3$).

### Esercizio 117

Un oggetto è posto a 10 $cm$ da una lente convergente con focale $f_c = 10\ cm$: successsivamente si trova, ad una distanza $d = 5\ cm$, una lente divergente con focale $f_d = -15\ cm$.

a. Determinare posizione, ingrandimento e tipo dell'immagine finale.

### Esercizio 118

Un sistema ottico è formato da due lenti convergenti $L_1$ e $L_2$, di focale $f_1 = 10\ cm$ e $f_2 = 90\ cm$, rispettivamente, poste ad una distanza di 60 $cm$ tra di loro, sullo stesso asse ottico.

Un oggetto di dimensioni $L = 10\ cm$ è posto sull'asse ottico del sistema, ad un distanza di 30 $cm$ da $L_1$ dalla parte opposta di $L_2$.

a. Determinare posizione, ingrandimento e tipo dell'immagine finale.

## Esercizio 119

Un oggetto luminoso di dimensioni trasversali non nulle è posto alla sinistra di una lente convergente di focale $f = 10\ cm$ di $h = 40\ cm$. Una seconda lente convergente di focale $f = 20\ cm$ è posta alla destra della prima ad una distanza di 30 $cm$.
Determinare:

a. il diagramma dei raggi luminosi;
b. la posizione dell'immagine finale;
c. l'ingrandimento dell'immagine.

---

**Soluzione esercizio 104**

a. $d = f_I + f_{II}$
Considero la seconda lente $1/p + 1/q = 1/f$
$p = (d + a) - f_I$ , $q = b$ , Ottengo, risolvendo il sistema:
$f_{II} = \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a}}\right) = 8.23\ cm$
$\frac{1}{f_{II}} = (n-1)\frac{2}{R}$ , $n = 1.61$

b. $f_I = d - f_{II} = 21.77\ cm$

**Soluzione esercizio 105**

a. La lunghezza del microscopio è in pratica la distanza tra l'oculare e l'obbettivo. Considero l'obbiettivo:
$1/p + 1/q = 1/f$ , $q = 255\ mm$
L'oculare deve essere posizionato in modo che l'immagine dell'obiettiva sia sul suo piano focale. Quindi: $L_{microscopio} = q + f_{oc} =\sim 30\ cm$

b. Ingrandimento dell'obbiettivo: $I_{ob} = q/p \sim 50$
Ingrandimento dell'oculare: $I_{oc} = L_d/f_{oc} = 5$
Ingrandimento microscopio: $I = I_{ob} \times I_{oc} = 250$

**Soluzione esercizio 106**

a. Considero arco di cerchio con diametro $d$ e freccia $f$ e con raggio di curvatura $R$:
$(R - f)^2 + (d/2)^2 = R^2$ , $R = \frac{f^2 + (d/2)^2}{2f} = 75.8\ cm$
$\frac{1}{d} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}$ , $l = 41.8\ cm$

b. Visto che l'oggetto si trova ad una distanza maggiore della distanza focale dello specchio, l'immagine è reale.

**Soluzione esercizio 107**

a. $1/p + 1/q = 1/f$ , $d = p + q$
Che risolto fornisce: $p_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - fd}$
L'equazione ha soluzioni reali solo se $f \leq d/4 = 80\ cm$

$f = 95$**:** non ha soluzioni: impossibile

$f = 80$**:** 2 soluzioni conicidenti: $p = q = d/2$. Ingrandimento $I = 1$

$f = 45$: 2 soluzioni simmetriche: $p_1 = 2.66\ m$, $I_1 = 0.2$ e $p_2 = 0.54\ m$, $I_2 = 4.9$

**Soluzione esercizio 108**

a. L'illuminazione dello schermo è pari al flusso di energia che lo colpisce. La sorgente emette luce in modo isotropo, quindi il flusso per unità di superficie risulta proporzionale a: $I = \frac{I_0}{r^2}$, dove $r$ è la distanza tra la sorgente e la superficie considerata.
Sia $d$ la distanza della sorgente dallo schermo, e $x$ quella della sorgente dallo specchio. Lo specchio forma una immagine della sorgente ad una distanza pari a $d + 2x$ dallo schermo. L'illuminazione totale dello schermo è quindi pari a $I_{tot} = I_{diretta} + I_{riflessa} = \frac{I_0}{d^2} + \frac{I_0}{(d+2x)^2}$
$\frac{I_{tot}}{I_{diretta}} = \frac{4x^2+4dx+2d^2}{(d+2x)^2} = \frac{m}{n}$
$x = -\frac{d}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{n}{m-n}}\right)$
Si trova che $m$ e $n$ sono limitati dalle seguenti relazioni: $m > n$, $m \leq 2n$; il che significa che, al massimo, l'intensità può essere raddoppiata. $m = 2n$ se $x = 0$, cioè la sorgente è addossata allo specchio. Attenzione: non è la condizione di massima illuminazione.

**Soluzione esercizio 109**

a. Sia $x$ la distanza tra la lente e lo schemo, e $f$ la distanza focale della lente.
Considero l'ingrandimento: $I = \frac{x}{D-x} = \frac{x-f}{f}$. Che risolta porge: $x = \frac{D \pm \sqrt{D^2-4f}}{2}$
Da cui si ricava che l'ingrandimento vale $I = \frac{D \pm \sqrt{D^2-4f}}{D \mp \sqrt{D^2-4f}}$ e la distanza focale deve essere $f = \frac{DI}{I+1}$

**Soluzione esercizio 110**

a. Se considero solo l'acqua, profondità apparente del pesce è $p' = \frac{p}{n} = 30\ cm$, ingrandimento trasversale $I = 1$.
Considero la lente: $1/p + 1/q = 1/f$ ; $q = -60\ cm$, ingrandimento trasversale $I = q/p = 6/5$
Il pesce viene visto da osservatore ad una distanza di 60 $cm$ dalla lente, dalla parte opposta all'osservatore (immagine virtuale), quindi viene visto nella stessa posizione in cui si trova realmente.

b. L'ingrandimento trasversale del pesce è pari a $I = 6/5$,

**Soluzione esercizio 111**

a. E' necessario ritardare la fase di una onda piana che colpisce il disco in modo che l'onda uscente abbia superfici con fase costante pari a semisfere con centro nel fuoco della lente.
Se considero un raggio luminoso sull'asse e uno che colpisce il disco ad una distanza $r$ dall'asse, il ritardo di fase $h$ dovrà essere tale da soddisfare l'equazione $(h + F)^2 = r^2 + F^2$ dove $F$ è la distanza focale della mia lenta, ovvero il centro delle onde semisferiche che fuoriescono dal disco. Con la solita approssimazione di raggi parassiali ($r \ll F$), risulta: $h = \frac{r^2}{2F}$
Tale differenza di cammino ottico è dovuta al diverso indice di rifrazione che incontra il raggio assiale da quello laterale.
$h = (n(r) - n(r = 0)) \cdot d = \frac{r^2}{2F}$ cioè l'indice di rifrazione in funzione della distanza dall'asse ($r$) dovrá risultare:
$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2dF}$

**Soluzione esercizio 112**

a. Dall'ingrandimento trasversale: $I = \frac{q}{p} = \frac{1}{5}$ e dall'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ricavo $q = 10\ cm$, e conseguentemente $f = 8.33\ cm$.
Considero l'immagine sfocata, e considero i raggi luminosi che passano per la parte distale della lente: essi vengono focalizzati nel piano focale e poi definiscono la larghezza dell'immagine sfocata. Quindi i due triangoli aventi come vertice il fuoco e come basi rispettivamente la lente ($D$) e l'immagine sfocata $s$ sono simili: le loro altezze cono rispettivamente $q$ e $d$.
Quindi ricavo: $D = \frac{s}{d} q = 1\ cm$. Infine, $F - number = \frac{f}{D} = 8.33$

**Soluzione esercizio 113**

a. Considero inizialmente il punto lontano e l'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
La distanza tra l'immagine e la lente è la profondità dell'occhoi $q = 2\ cm$ (un valore di $24\ mm$ sarebbe mediamente più corretto). $p = 300\ cm$, quindi $f_{FAR} = 1.987\ cm$ $P_{FAR} = 50.3\ D$.

b. Al punto vicino: $p = 100\ cm$, $f_{NEAR} = 1.961\ cm$ $P_{FAR} = 51\ D$.

c. Per un occhio normale, la distanza di visione distinta è circa $25\ cm$: oggetti più vicini non vengono messi a fuoco corretamente. In questa condizione, il potere diottrico del cristallino è pari a $P_{distinta} = 54\ D$.

Nell'ipotesi che cristallino e lente di correzione si possano considerare addossate (ipotesi che vale per lenti a contatto, ma non per occhiali ordinari):
$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{occhio}} + \frac{1}{f_{lente}}$
Il massimo potere diottrico dell'occhio del soggetto è 51 $D$, quindi la lente ne deve fornire $P_{lente} = 3\ dt$ per arrivare a equagliare il potere diottrico di un occhio normale.
Analogamente, al punto lontano, un occhio normale deve essere in grado di mettere a fuoco un oggetto all'infinito (se vogliamo essere più precisi, ad una distanza maggiore della distanza iperfocale). In questo caso $P_{infinito} = 50\ D$ e la lente deve fornire un contributo pari a $P_{lente} = -0.3\ D$, quindi serve una lente divergente.

**Soluzione esercizio 114**

a. Considero un elemento di volume $dV$ sulla superficie del mercurio, che forma un angolo $\theta$ rispetto all'orizzontale. Le forze che agiscono su questo volumetto sono: forza peso, forza centrifuga (è un sistema non inerziale) e forza di reazione. Sia $x$ l'asse orizzontale (verso l'esterno), e $y$ quello verticale (verso l'alto).
$\vec{F_g} = -g\rho dV\hat{y}$ , $\vec{F_c} = \rho\omega^2 r dV\hat{x}$ $\vec{R} = -(\vec{F_g} + \vec{F_c})$ $\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \frac{F_c}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}$
Risolvendo l'equazione differenziale: $dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr$ con condizione al contorno $Z(r = 0) = 0$, si ottine $z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$
Quindi si tratta di una parabola.

b. Il fuoco di una parabola $y = ax^2$ con vertice in $(0, 0)$ è in $(0, \frac{1}{4a})$. Per noi $F = (0., \frac{g}{2\omega^2})$
Quindi per avere $f = 10\ cm$ $\omega = 7\ rad/s$

**Soluzione esercizio 115**

a. Per lo specchio $f = R/2 = 20\ cm$ quindi $R = 40\ cm$.
Si consideri ora lo stesso specchio riempito d'acqua: considero sempre raggi parassiali. Essi vengono riflessi dallo specchio in modo tale da essere focalizzati ad una distanza pari a $f$ da esso anche in presenza del liquido. I raggi riflessi, uscendo dall'acqua, vengono rifratti secondo le leggi di Snell. Sia $O$ il centro dello specchio, $F$ il fuoco in assenza di acqua, $F'$ quello con l'acqua e $A$ il punto dove un generico raggio riflesso attraversa l'interfaccia acqua-aria [1]. L'angolo con il quale i raggi vengono riflessi dallo specchio (rispetto

[1]NdA: un disegno aiuterebbe...

alla verticale) è $\tan\theta = \frac{AO}{FO}$ e l'angolo con il quale gli stessi raggi escono dall'acqua: $\tan\theta' = \frac{AO}{F'O}$. Inoltre, per angoli piccoli, $n\theta = \theta'$. Quindi: $FO' = \frac{FO}{n} = 15$.
Più semplicemente, si tratta di un diottro aria acqua con raggio di curvatura infinito, quindi $1/p = -n/q$. Per raggi incidenti, $p = \infty$ quindi anche $q = \infty$, cioè non vengono deviati. Per quelli in uscita, $q = -\frac{p}{n}$, con $p = -\frac{R}{2}$.
Dalla legge dei punti coniugati: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{x} = \frac{1}{f'}$ si ricava $x = 2f' = 30\ cm$

**Soluzione esercizio 116**

a. In aria, il primo vetro non fa nulla, perchè il suo spessore è costante, il secondo agisce come uno specchio sferico $f = \frac{R}{2}$. In condizioni di autocollimazione, $x = 2f = R = 20\ cm$.
Se all'interno c'e' acqua, questa si comporta come una lente che viene attraversata due volte, prima e dopo la riflessione dallo specchio interno. Da notare che il sistema si può scomporre in questi fattori: una lente piano-concava, la cui superficie concava è data dal primo vetro d'orologio (quello trasparente), con incollato uno specchio sferico riempito di acqua. Inoltre, le lenti piano-concave hanno da un lato non aria, ma acqua, quindi un mezzo con indic di rifrazione $n$. In questo caso, la legge dei punti coniugati è $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{f}$. La focale della lente è $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$
In alternativa, si può considerare che la lente sia in aria, e che lo specchio sia in acqua. Per cui cambia la distanza focale dello specchio $f' = f/n$ (vedi esercizio precedente): ossia si può immaginare di mettere uno spessore constante di aria in mezzo alla lente.
Il raggio di luce incontra quindi, nell'ordine: una lente piano concava, uno specchio sferico in acqua, di nuovo la lente piano concava. L'immagine di ogni elemento è la sorgente per l'elemento successivo.
Prima lente ($x$ è posizione immagine): $\frac{1}{L} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{R}$ Specchio ($y$ è posizione immagine): $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{R}$ Seconda lente ($L$ è distanza di autocollimazione): $-\frac{n}{y} + \frac{1}{L} = \frac{n-1}{R}$.
Risolvendo il sistema si ottiene $L = 12\ cm$.

**Soluzione esercizio 117**

a. Per la prima lente l'oggetto si trova sul fuoco, quindi l'immagine è all'infinito $q_1 = \infty$. Per la seconda lente: $p_2 = \infty$ quindi

$q_2 = f_2 = -15\ cm$. Quindi la posizione dell'immagine coincide con quella dell'oggetto.
Dato che abbiamo immagini all'infinito, non si può parlare di ingrandimenti trasversali, ma occorre ragionare con gli angolo. L'angolo sotto il quale viene vista l'immagine della prima lente è $\theta = \frac{L}{f_1}$, essendo $L$ la dimensione trasversale dell'oggetto. Dopo la seconda lente, l'immagine viene sempre vista sotto lo stesso angolo, ma adesso ad una distanza $f_2$ dalla lente. Quindi le dimensioni trasversali dell'immagine della seconda lente risultano: $L'' = \theta f_2 = L\frac{f_2}{f_1}$.
L'ingrandimento quindi risulta $I = \frac{f_2}{f_1}$. Il sistema ottico ricorda un po' il telescopio, con però immagini intermedie all'infinito e non l'oggetto e l'immagine finale.
L'immagine e' ovviamente virtuale, e risulta non invertita.

**Soluzione esercizio 118**

a. L'immagine di $L_1$ è reale, invertita. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$ porge: $q_1 = 15\ cm$. L'ingrandimento è $I_1 = \frac{q_1}{p_1} = 0.5$.
L'oggetto della seconda lente si trova a $p_2 = 45\ cm$ da essa, e l'immagine, usando l'equazione delle lenti, si trova a $q - 2 = -90\ cm$. L'immagine e' non invertita e virtuale. L'ingrandimento risulta $I_2 = -2$.
Quindi la posizione dell'immagine finale è a 30 $cm$ prima della prima lente, quindi coincide con l'oggetto, l'ingrandimento totale è $I = -1$, quindi ha le stesse dimensioni trasverse, ma risulta invertita rispetto all'oggetto.

**Soluzione esercizio 119**

a. L'immagine finale è virtuale, rovesciata e risulta ingrandita.
b. L'esercizio è del tutto analogo al precedente, si danno solo i risultati numerici.
Immagine prima lente: $q_1 = 40/3\ cm$. Immagine seconda lente $q_2 = -100\ cm$
c. Ingrandimento $I_tot = -2$