

4.4 Reticoli

Esercizio 92

Un fascio piano di onde *e.m.* con frequenza $\nu = 10^{11}$ Hz incide su uno schermo conduttore piano su cui sono praticate 5 fenditure parallele e lunghe, di larghezza $a = 6$ mm e passo $p = 18$ mm.

Calcolare:

- quanti massimi di segnale sono presenti oltre a quello a $\theta = 0$;
- la posizione di questi massimi;
- quanto deve essere largo un rivelatore per raccogliere tutta l'energia del primo massimo se la distanza tra le fenditure e il rivelatore è $L = 1$ m

Esercizio 93

Luce piana, monocromatica, $\lambda = 0.6$ μm colpisce un reticolo con $N = 5$ fenditure parallele e lunghe, con passo $p = 9$ μm e larghezza $a \ll \lambda$. A distanza di 1 m è posta una lente con potere $P = 2$ dt, e si osserva la figura di interferenza di Fraunhofer su schermo posto sul piano focale della lente.

Calcolare:

- La distanza sullo schermo tra il massimo principale e quello di ordine 1;
- Il numero di max secondari compresi tra due max primari;
- Sposto lo schermo per osservare l'immagine delle fenditure: quale deve essere la distanza tra queste immagini?

Esercizio 94

Un fascio di luce con $\lambda = 514.5$ nm (Argon) incide normalmente su un reticolo con $N = 6000$ righe/cm.

Calcolare:

- Il più elevato ordine di massimo principale;
- La distanza tra il max 0 e max 1 se l'immagine è focalizzata con lente con $f = 12$ cm;
- La dimensione minima del reticolo per risolvere nel max del primo ordine il doppietto $\lambda = 514.5 \div 514.6$ nm

Esercizio 95

Un reticolo con $N = 8000$ fenditure di larghezza $a = 3$ μm e passo $p = 8$ μm

viene illuminato con luce monocromatica e normale $\lambda = 0.4 \mu m$. La luce viene osservata su piano focale di una lente.

Calcolare:

- Il numero di massimi principali;
- L'intensità del max di ordine 4 rispetto a quello di ordine 0;
- Il minimo diametro della lente per non aumentare la larghezza dei massimi.

Esercizio 96

Un reticolo è illuminato da luce $\lambda = 5550 \text{ \AA}$ normale e osservata con una lente. Si vedono massimi corrispondenti a $\sin \theta = 0.2, 0.4, 0.6$. L'intensità della 3^a riga è 25% di quella centrale.

Calcolare:

- Il passo del reticolo;
- La larghezza minima delle fenditure;
- La dispersione massima $D = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}$
- La max separazione angolare per il doppietto del sodio $\lambda = 5890, 5896 \text{ \AA}$.

Esercizio 97

Un reticolo con 5000 fenditure per cm, larghezza $L = 5 \text{ cm}$ è illuminato con luce $\lambda = 0.55 \mu m$ in condizioni di Fraunhofer.

Calcolare:

- Il numero di massimi principali;
- la minima larghezza delle fenditure per cui il max di ordine più elevato è assente;
- La distanza tra il max di ordine 0 e 1 se visto con lente con $P = 3 \text{ dr}$;
- Il minimo $\Delta \lambda$ risolvibile.

Soluzione esercizio 92

- a. Il conduttore assorbe le onde *e.m.*, quindi siamo in presenza di un reticolo formato da 5 fenditure. La posizione dei massimi principali di interferenza è data da:

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{p}$$

Il più grande ordine di massimi principali si ottiene forzando il $\sin \theta_n < 1$, il che porge: $n_{max} = \text{int} \frac{p}{\lambda}$. Nel nostro caso $\frac{p}{\lambda} = 6$, quindi il massimo ordine visibile sarebbe il numero 6, per un totale di $(6 \cdot 2) + 1 = 13$ massimi, per tenere conto di quelli a destra e a sinistra $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ e del massimo centrale. Il massimo principale di ordine 6 si ha per $\sin \theta_6 = 1$, il che non è molto fisico, visto che corrisponderebbe a $\theta_6 = 90^\circ$.

Occorre poi tenere conto dei minimi di diffrazione, ossia del cosiddetto fattore di forma. Essi sono presenti per:

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{a}$$

e, nel caso coincidano con i massimi di interferenza, rendono invisibili questi ultimi. Occorre perciò verificare se vi siano coppie di interi con segno n, m , con $n < 6$ tali da verificare $\sin \theta_m = \sin \theta_n$, ovvero tali che:

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{p} = 3$$

Si trova così che i minimi di diffrazione di ordine ± 1 e ± 2 corrispondono ai massimi di interferenza di ordine ± 3 e ± 6 , rispettivamente.

Quindi i massimi effettivamente visibili sono $((6 - 2) \cdot 2) + 1 = 9$. Per inciso, il massimo di ordine ± 6 non risulta comunque visibile perchè sovrapposto ad un minimo di diffrazione, togliendoci quindi dall'imbarazzo se dichiararlo visibile o meno (non sarebbe visibile).

- b. La posizione dei massimi è: $x_n = L \cdot \tan \theta_n = L \tan \arcsin(\frac{n\lambda}{p})$ dove l'approssimazione per angoli piccoli non vale nel nostro caso (tranne che per $n = \pm 1$).

n	$x_{\pm n}$
1	$\pm 16.9 \text{ cm}$
2	$\pm 35.3 \text{ cm}$
4	$\pm 89.4 \text{ cm}$
5	$\pm 150.8 \text{ cm}$

- c. La distanza tra un massimo principale e il minimo immediatamente adiacente è pari a $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Np}$, ed equivale alla semilarghezza del massimo principale. Per raccogliere tutta la luce ho quindi bisogno di un rivelatore largo:

$$\Delta z_{riv} = 2 \cdot L \frac{\lambda}{Np} = 6.67 \text{ cm}$$

Soluzione esercizio 93

- a. Massimi principali sono: $x_n = f \cdot \sin \theta_n = f \frac{n\lambda}{p}$, quindi $\Delta x_{0,1} = f \frac{\lambda}{p} = 3.3 \text{ cm}$
- b. Tra due massimi principali vi sono $N - 1$ minimi e $N - 2$ massimi secondari.
- c. Per osservare sullo schermo l'immagine delle fenditure $\frac{1}{p_L} + \frac{1}{q_L} = \frac{1}{f_L}$ che porge: $q_L = 1 \text{ m}$.
La distanza tra le immagini delle due fenditure sullo schermo è quella originale moltiplicata per l'ingrandimento: $y' = \frac{q}{p}y = y$

Soluzione esercizio 94

- a. Il passo è $p = 1/N = 1.67 \text{ } \mu\text{m}$, $n_{max} < \frac{p}{\lambda} = 3.23$, quindi il massimo ordine di massimi principali è il terzo.
- b. La posizione del massimo centrale è $x_0 = 0$. Quella del massimo di ordine n è $x_n = nf\lambda/p$ (nell'approx di angoli piccoli). Quindi $x_1 = 3.7 \text{ cm}$.
- c. Il potere risolutivo del reticolo è $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} < nN$, dove N è il numero totale di fenditure $N = N_l \cdot D$, al primo ordine risulta quindi $D > \frac{\lambda}{N_l \Delta\lambda} = .875 \text{ cm}$. Se invece avessi considerato il terzo massimo principale, dove il potere risolutivo è massimo, la larghezza sarebbe stata un terzo $D_3 = .286 \text{ cm}$.

Soluzione esercizio 95

- a. $n_{max} < d/\lambda = 20$, quindi ci sono $20 \cdot 2 + 1 = 41$ massimi principali di interferenza. si deve tenere conto anche del fattore di forma, la diffrazione della singola fenditura, che ha dei minimi in corrispondenza a $\sin \theta_m = m\lambda/a$. Se questi corrispondono ai massimi di interferenza, allora questi ultimi non sono visibili. Ciò avviene se $n\lambda/p = m\lambda/a$ cioè se $\frac{n}{m} = \frac{8}{3}$, e quindi per $(m, n) = \pm(3, 8), \pm(6, 16)$. Quindi ci sono $41 - 4 = 37$ massimi visibili.

- b. $I_4/I_0 = \frac{\sin^2 \Phi_4}{\Phi_4^2}$ dove $\Phi_4 = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta_4 = \frac{\pi a}{d}$. Quindi $I_4/I_0 = 0.045$
- c. La larghezza angolare del massimo principale è $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$. La risoluzione della lente non deve essere superiore a tale larghezza angolare, quindi: $1.22 \frac{\lambda}{D} < \frac{\lambda}{Nd}$, cioè $D > 1.22Nd = 7.8 \text{ cm}$

Soluzione esercizio 96

- a. $\sin \theta_n^{max} = n \frac{\lambda}{p}$ quindi, considerando il primo massimo, $p = \lambda/0.2 = 2.78 \mu m$.
- b. $\frac{I_3}{I_0} = \frac{\sin^2(\frac{3\pi ap}{p})}{(\frac{3\pi ap}{p})^2} = 0.25$. Risolvendo numericamente l'equazione, si ottiene $a/p \approx .2$, quindi $a \approx 0.556 \mu m$
- c. La dispersione si ottiene derivando la relazione $\sin \theta = n\lambda/p$ e si ottiene $D = \left(\left(\frac{p}{n} \right)^2 - \lambda^2 \right)^{-1/2}$, che, per i valori del problema, e all'ordine 3 (il quarto ha un'intensità di solo il 4% quindi poco visibile) $D_3 = 1.39 \text{ rad}/\mu m$
- d. $\Delta\theta = D_3 \cdot \Delta\lambda = 8.3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

Soluzione esercizio 97

- a. $n_{max} < p/\lambda = 3$, quindi ho $3 \cdot 2 + 1 = 7$ massimi.
- b. Minimi di diffrazione $\sin \theta_3 = 3\lambda/p = \lambda/a$, quindi $a = p/3 = 0.67 \mu m$
- c. $\Delta x = \frac{\lambda}{pP} = 9 \text{ cm}$
- d. considero il max di ordine 2 (il più elevato visibile), $\Delta\lambda > \frac{\lambda}{2nL} = 1.1 \cdot 10^{-5} \mu m$