4.6 Lenti

Esercizio 104

Due lenti biconvesse sono posizionate lungo il cammino ottico di un fascio di luce, separate da una distanza d. Il fascio di luce è parallelo e esce parallelo dopo le due lenti. Se si sposta la seconda lente di a si forma una immagine ad una distanza b da essa. Noto il raggio di curvatura delle lenti $R = 30\ cm$, $a = 10\ cm$, $b = 15\ cm$ e $d = 30\ cm$, determinare:

a. L'indice di rifrazione n della seconda lente;
b. la distanza focale f della prima lente.

Esercizio 105

La distanza focale di un microscopio è $5\ mm$, quella dell'oculare $48\ mm$. Un oggetto è posto ad una distanza dall'obbiettivo pari a $5.1\ mm$: ricordando che per un osservatore la "visione distinta" avviene per una distanza di $240\ mm$, calcolare:

a. la lunghezza del microscopio;
b. l'ingrandimento dell'oggetto.

Esercizio 106

Uno specchio sferico concavo circolare ha un diametro $d = 30\ cm$ e freccia $f = 1.5\ cm$, e riflette un oggetto posto a $4\ m$ dalla sua sperficie.

a. Dove si forma l'immagine?
b. E' reale o virtuale?

Esercizio 107

Si vuole proiettare l'immagine di un oggetto su uno schermo distante $3.20\ m$. Si hanno a disposizione tre diverse lenti, di focale, rispettivamente $f = 95,\ 80,\ 45\ cm$.

a. Come si possono posizionare le lenti?

Esercizio 108

Una sorgente luminosa si trova tra uno specchio e uno schermo paralleli.

a. Trovare la distanza dallo specchio per cui l'illuminazione dello schermo diventi (m/n) volte quella senza specchio.

Esercizio 109

Un oggetto si trova ad una distanza D da uno schermo. Si vuole proiettare l'immagine dell'oggetto sullo schermo ingrandita di un fattore I.

a. Che lente devo usare, e dove deve essere messa?

Esercizio 110

Un pesce si trova ad una profondità di $p = 40\ cm$ sotto la superficie di un lago ($n = 1.33$) ed è osservato da una lente convergente con focale $f = 400\ cm$ che si trova $d = 20\ cm$ sopra la superficie del lago. Determinare:

a. Dove è osservata l'immagine del pesce (che si assuma su asse ottico della lente)
b. Quale è l'ingrandimento con cui si vede il pesce?

Esercizio 111

L'indice di rifrazione può essere aumentato diffondendo impurità in un mezzo trasparente: è possibile in questo modo costruire lenti di spessore constante.

a. Si consideri un disco di raggio a e spessore d, trovare $n(r)$ per ottenere una lente di focale F. Porre $n(0) = n_0$.

Esercizio 112

Un oggetto lungo 5 mm è posto a 50 cm da una lente di una macchina fotografica, sull'asse ottico. L'immagine è focalizzata sulla pellicola ed è lunga 1 mm. Se la pellicola viene spostata indietro di 1 cm, l'immagine si sfocalizza di 1 mm (Cioè l'immagine di un punto luminoso diventa larga 1 mm).

a. Calcolare il rapporto focale F della lente ($F = f/D$, D larghezza lente).

Esercizio 113

Un uomo di di 55 anni è in grado di mettere a fuoco immagini poste tra 100 e 300 cm. Si consideri l'occhio come un sistema ottico formato da una lente convergente con focale variabile (cristallino) posto a 2 cm dallo schermo (retina).
Determinare:

a. la lunghezza focale del cristallino al punto lontano;
b. quella del punto vicino;
c. la lunghezza focale nella parte inferiore delle sue lenti bifocale per mettere a fuoco un punto distante 25 cm;

d. perchè è necessario che le lenti siano bifocali.

Esercizio 114

In ambito astronomico è stato proposto uno specchio parabolico ottenuto ruotando mercurio (liquido) attorno ad un asse.
Determinare:

a. la forma dello specchio che si ottiene in questo modo: l'equazione della superficie e l'equazione ottica dello specchio;
b. la velocità angolare cui si deve ruotare il mercurio per avere una distanza focale di 10 cm.

Esercizio 115

Uno specchio sferico orizzontale focalizza luce parassiale (prossima all'asse e parallela) ad una distanza di 20 cm. Si riempie la concavità dello specchio con acqua ($n = 4/3$) e si illumina il sitema dall'alto attraverso un forellino praticato su uon scehrmo pure orizzontale.

a. Determinare la distanza alla quale si deve porre lo schermo forato perchè l'immagine sia a fuoco sullo schermo stesso (autocollimazione).

Esercizio 116

Due vetri di orologio identici (concavo-convessi con uguale curvature e quindi a spessore costante) sono incollati tra loro al bordo e uno dei due è riflettente dalla parte interna. In condizioni di autocollimazione (vedi problema precedente) il fuoco è ottenuto a 20 cm.

a. Determinare la distanza L per ottenere autocollimazione se lo spazio tra i due vetri è riempito di acqua ($n = 4/3$).

Esercizio 117

Un oggetto è posto a 10 cm da una lente convergente con focale $f_c = 10\ cm$: successsivamente si trova, ad una distanza $d = 5\ cm$, una lente divergente con focale $f_d = -15\ cm$.

a. Determinare posizione, ingrandimento e tipo dell'immagine finale.

Esercizio 118

Un sistema ottico è formato da due lenti convergenti L_1 e L_2, di focale $f_1 = 10\ cm$ e $f_2 = 90\ cm$, rispettivamente, poste ad una distanza di 60 cm tra di loro, sullo stesso asse ottico.

Un oggetto di dimensioni $L = 10\ cm$ è posto sull'asse ottico del sistema, ad un distanza di 30 cm da L_1 dalla parte opposta di L_2.

a. Determinare posizione, ingrandimento e tipo dell'immagine finale.

Esercizio 119

Un oggetto luminoso di dimensioni trasversali non nulle è posto alla sinistra di una lente convergente di focale $f = 10\ cm$ di $h = 40\ cm$. Una seconda lente convergente di focale $f = 20\ cm$ è posta alla destra della prima ad una distanza di 30 cm.
Determinare:

a. il diagramma dei raggi luminosi;
b. la posizione dell'immagine finale;
c. l'ingrandimento dell'immagine.

Soluzione esercizio 104

a. $d = f_I + f_{II}$
Considero la seconda lente $1/p + 1/q = 1/f$
$p = (d + a) - f_I \quad , \quad q = b \quad ,$ Ottengo, risolvendo il sistema:
$f_{II} = \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a}}\right) = 8.23\ cm$
$\frac{1}{f_{II}} = (n-1)\frac{2}{R} \quad , \quad n = 1.61$

b. $f_I = d - f_{II} = 21.77\ cm$

Soluzione esercizio 105

a. La lunghezza del microscopio è in pratica la distanza tra l'oculare e l'obbettivo. Considero l'obbiettivo:
$1/p + 1/q = 1/f \quad , \quad q = 255\ mm$
L'oculare deve essere posizionato in modo che l'immagine dell'obiettiva sia sul suo piano focale. Quindi: $L_{microscopio} = q + f_{oc} =\sim 30\ cm$

b. Ingrandimento dell'obbiettivo: $I_{ob} = q/p \sim 50$
Ingrandimento dell'oculare: $I_{oc} = L_d/f_{oc} = 5$
Ingrandimento microscopio: $I = I_{ob} \times I_{oc} = 250$

Soluzione esercizio 106

a. Considero arco di cerchio con diametro d e freccia f e con raggio di curvatura R:
$(R - f)^2 + (d/2)^2 = R^2 \quad , \quad R = \frac{f^2 + (d/2)^2}{2f} = 75.8\ cm$
$\frac{1}{d} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R} \quad , \quad l = 41.8\ cm$

b. Visto che l'oggetto si trova ad una distanza maggiore della distanza focale dello specchio, l'immagine è reale.

Soluzione esercizio 107

a. $1/p + 1/q = 1/f \quad , \quad d = p + q$
Che risolto fornisce: $p_{1,2} = d/2 \pm \sqrt{(d/2)^2 - fd}$
L'equazione ha soluzioni reali solo se $f \leq d/4 = 80\ cm$

$f = 95$**:** non ha soluzioni: impossibile

$f = 80$**:** 2 soluzioni conicidenti: $p = q = d/2$. Ingrandimento $I = 1$

$f = 45$**:** 2 soluzioni simmetriche: $p_1 = 2.66\ m$, $I_1 = 0.2$ e $p_2 = 0.54\ m$, $I_2 = 4.9$

Soluzione esercizio 108

a. L'illuminazione dello schermo è pari al flusso di energia che lo colpisce. La sorgente emette luce in modo isotropo, quindi il flusso per unità di superficie risulta proporzionale a: $I = \frac{I_0}{r^2}$, dove r è la distanza tra la sorgente e la superficie considerata.
Sia d la distanza della sorgente dallo schermo, e x quella della sorgente dallo specchio. Lo specchio forma una immagine della sorgente ad una distanza pari a $d + 2x$ dallo schermo. L'illuminazione totale dello schermo è quindi pari a $I_{tot} = I_{diretta} + I_{riflessa} = \frac{I_0}{d^2} + \frac{I_0}{(d+2x)^2}$
$\frac{I_{tot}}{I_{diretta}} = \frac{4x^2+4dx+2d^2}{(d+2x)^2} = \frac{m}{n}$
$x = -\frac{d}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{n}{m-n}}\right)$
Si trova che m e n sono limitati dalle seguenti relazioni: $m > n$, $m \leq 2n$; il che significa che, al massimo, l'intensità può essere raddoppiata. $m = 2n$ se $x = 0$, cioè la sorgente è addossata allo specchio. Attenzione: non è la condizione di massima illuminazione.

Soluzione esercizio 109

a. Sia x la distanza tra la lente e lo schemo, e f la distanza focale della lente.
Considero l'ingrandimento: $I = \frac{x}{D-x} = \frac{x-f}{f}$. Che risolta porge: $x = \frac{D \pm \sqrt{D^2-4f}}{2}$
Da cui si ricava che l'ingrandimento vale $I = \frac{D \pm \sqrt{D^2-4f}}{D \mp \sqrt{D^2-4f}}$ e la distanza focale deve essere $f = \frac{DI}{I+1}$

Soluzione esercizio 110

a. Se considero solo l'acqua, profondità apparente del pesce è $p' = \frac{p}{n} = 30\ cm$, ingrandimento trasversale $I = 1$.
Considero la lente: $1/p + 1/q = 1/f$; $q = -60\ cm$, ingrandimento trasversale $I = q/p = 6/5$
Il pesce viene visto da osservatore ad una distanza di 60 cm dalla lente, dalla parte opposta all'osservatore (immagine virtuale), quindi viene visto nella stessa posizione in cui si trova realmente.

b. L'ingrandimento trasversale del pesce è pari a $I = 6/5$,

Soluzione esercizio 111

a. E' necessario ritardare la fase di una onda piana che colpisce il disco in modo che l'onda uscente abbia superfici con fase costante pari a semisfere con centro nel fuoco della lente.
Se considero un raggio luminoso sull'asse e uno che colpisce il disco ad una distanza r dall'asse, il ritardo di fase h dovrà essere tale da soddisfare l'equazione $(h+F)^2 = r^2 + F^2$ dove F è la distanza focale della mia lenta, ovvero il centro delle onde semisferiche che fuoriescono dal disco. Con la solita approssimazione di raggi parassiali ($r \ll F$), risulta: $h = \frac{r^2}{2F}$
Tale differenza di cammino ottico è dovuta al diverso indice di rifrazione che incontra il raggio assiale da quello laterale.
$h = (n(r) - n(r=0)) \cdot d = \frac{r^2}{2F}$ cioè l'indice di rifrazione in funzione della distanza dall'asse (r) dovrá risultare:
$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2dF}$

Soluzione esercizio 112

a. Dall'ingrandimento trasversale: $I = \frac{q}{p} = \frac{1}{5}$ e dall'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ricavo $q = 10\ cm$, e conseguentemente $f = 8.33\ cm$.
Considero l'immagine sfocata, e considero i raggi luminosi che passano per la parte distale della lente: essi vengono focalizzati nel piano focale e poi definiscono la larghezza dell'immagine sfocata. Quindi i due triangoli aventi come vertice il fuoco e come basi rispettivamente la lente (D) e l'immagine sfocata s sono simili: le loro altezze cono rispettivamente q e d.
Quindi ricavo: $D = \frac{s}{d}q = 1\ cm$. Infine, $F - number = \frac{f}{D} = 8.33$

Soluzione esercizio 113

a. Considero inizialmente il punto lontano e l'equazione dei punti coniugati $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
La distanza tra l'immagine e la lente è la profondità dell'occhoi $q = 2\ cm$ (un valore di $24\ mm$ sarebbe mediamente più corretto). $p = 300\ cm$, quindi $f_{FAR} = 1.987\ cm$ $P_{FAR} = 50.3\ D$.

b. Al punto vicino: $p = 100\ cm$, $f_{NEAR} = 1.961\ cm$ $P_{FAR} = 51\ D$.

c. Per un occhio normale, la distanza di visione distinta è circa $25\ cm$: oggetti più vicini non vengono messi a fuoco corretamente. In questa condizione, il potere diottrico del cristallino è pari a $P_{distinta} = 54\ D$.

Nell'ipotesi che cristallino e lente di correzione si possano considerare addossate (ipotesi che vale per lenti a contatto, ma non per occhiali ordinari):
$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{occhio}} + \frac{1}{f_{lente}}$
Il massimo potere diottrico dell'occhio del soggetto è 51 D, quindi la lente ne deve fornire $P_{lente} = 3\ dt$ per arrivare a equagliare il potere diottrico di un occhio normale.
Analogamente, al punto lontano, un occhio normale deve essere in grado di mettere a fuoco un oggetto all'infinito (se vogliamo essere più precisi, ad una distanza maggiore della distanza iperfocale). In questo caso $P_{infinito} = 50\ D$ e la lente deve fornire un contributo pari a $P_{lente} = -0.3\ D$, quindi serve una lente divergente.

Soluzione esercizio 114

a. Considero un elemento di volume dV sulla superficie del mercurio, che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Le forze che agiscono su questo volumetto sono: forza peso, forza centrifuga (è un sistema non inerziale) e forza di reazione. Sia x l'asse orizzontale (verso l'esterno), e y quello verticale (verso l'alto).
$\vec{F_g} = -g\rho dV\hat{y}$, $\vec{F_c} = \rho\omega^2 rdV\hat{x}$ $\vec{R} = -(\vec{F_g} + \vec{F_c})$ $\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \frac{F_c}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}$
Risolvendo l'equazione differenziale: $dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr$ con condizione al contorno $Z(r = 0) = 0$, si ottine $z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$
Quindi si tratta di una parabola.

b. Il fuoco di una parabola $y = ax^2$ con vertice in $(0, 0)$ è in $(0, \frac{1}{4a})$. Per noi $F = (0., \frac{g}{2\omega^2})$
Quindi per avere $f = 10\ cm$ $\omega = 7\ rad/s$

Soluzione esercizio 115

a. Per lo specchio $f = R/2 = 20\ cm$ quindi $R = 40\ cm$.
Si consideri ora lo stesso specchio riempito d'acqua: considero sempre raggi parassiali. Essi vengono riflessi dallo specchio in modo tale da essere focalizzati ad una distanza pari a f da esso anche in presenza del liquido. I raggi riflessi, uscendo dall'acqua, vengono rifratti secondo le leggi di Snell. Sia O il centro dello specchio, F il fuoco in assenza di acqua, F' quello con l'acqua e A il punto dove un generico raggio riflesso attraversa l'interfaccia acqua-aria [1].
L'angolo con il quale i raggi vengono riflessi dallo specchio (rispetto

[1] NdA: un disegno aiuterebbe...

alla verticale) è $\tan\theta = \frac{AO}{FO}$ e l'angolo con il quale gli stessi raggi escono dall'acqua: $\tan\theta' = \frac{AO}{F'O}$. Inoltre, per angoli piccoli, $n\theta = \theta'$. Quindi: $FO' = \frac{FO}{n} = 15$.
Più semplicemente, si tratta di un diottro aria acqua con raggio di curvatura infinito, quindi $1/p = -n/q$. Per raggi incidenti, $p = \infty$ quindi anche $q = \infty$, cioè non vengono deviati. Per quelli in uscita, $q = -\frac{p}{n}$, con $p = -\frac{R}{2}$.
Dalla legge dei punti coniugati: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{x} = \frac{1}{f'}$ si ricava $x = 2f' = 30\ cm$

Soluzione esercizio 116

a. In aria, il primo vetro non fa nulla, perchè il suo spessore è costante, il secondo agisce come uno specchio sferico $f = \frac{R}{2}$. In condizioni di autocollimazione, $x = 2f = R = 20\ cm$.
Se all'interno c'e' acqua, questa si comporta come una lente che viene attraversata due volte, prima e dopo la riflessione dallo specchio interno. Da notare che il sistema si può scomporre in questi fattori: una lente piano-concava, la cui superficie concava è data dal primo vetro d'orologio (quello trasparente), con incollato uno specchio sferico riempito di acqua. Inoltre, le lenti piano-concave hanno da un lato non aria, ma acqua, quindi un mezzo con indic di rifrazione n. In questo caso, la legge dei punti coniugati è $\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{1}{f}$. La focale della lente è $\frac{1}{f} = (n-1)\frac{1}{R}$
In alternativa, si può considerare che la lente sia in aria, e che lo specchio sia in acqua. Per cui cambia la distanza focale dello specchio $f' = f/n$ (vedi esercizio precedente): ossia si può immaginare di mettere uno spessore constante di aria in mezzo alla lente.
Il raggio di luce incontra quindi, nell'ordine: una lente piano concava, uno specchio sferico in acqua, di nuovo la lente piano concava. L'immagine di ogni elemento è la sorgente per l'elemento successivo.
Prima lente (x è posizione immagine): $\frac{1}{L} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{R}$ Specchio (y è posizione immagine): $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{R}$ Seconda lente (L è distanza di autocollimazione): $-\frac{n}{y} + \frac{1}{L} = \frac{n-1}{R}$.
Risolvendo il sistema si ottiene $L = 12\ cm$.

Soluzione esercizio 117

a. Per la prima lente l'oggetto si trova sul fuoco, quindi l'immagine è all'infinito $q_1 = \infty$. Per la seconda lente: $p_2 = \infty$ quindi

$q_2 = f_2 = -15\ cm$. Quindi la posizione dell'immagine coincide con quella dell'oggetto.
Dato che abbiamo immagini all'infinito, non si può parlare di ingrandimenti trasversali, ma occorre ragionare con gli angolo. L'angolo sotto il quale viene vista l'immagine della prima lente è $\theta = \frac{L}{f_1}$, essendo L la dimensione trasversale dell'oggetto. Dopo la seconda lente, l'immagine viene sempre vista sotto lo stesso angolo, ma adesso ad una distanza f_2 dalla lente. Quindi le dimensioni trasversali dell'immagine della seconda lente risultano: $L'' = \theta f_2 = L\frac{f_2}{f_1}$.
L'ingrandimento quindi risulta $I = \frac{f_2}{f_1}$. Il sistema ottico ricorda un po' il telescopio, con però immagini intermedie all'infinito e non l'oggetto e l'immagine finale.
L'immagine e' ovviamente virtuale, e risulta non invertita.

Soluzione esercizio 118

a. L'immagine di L_1 è reale, invertita. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$ porge: $q_1 = 15\ cm$. L'ingrandimento è $I_1 = \frac{q_1}{p_1} = 0.5$.
L'oggetto della seconda lente si trova a $p_2 = 45\ cm$ da essa, e l'immagine, usando l'equazione delle lenti, si trova a $q - 2 = -90\ cm$. L'immagine e' non invertita e virtuale. L'ingrandimento risulta $I_2 = -2$.
Quindi la posizione dell'immagine finale è a 30 cm prima della prima lente, quindi coincide con l'oggetto, l'ingrandimento totale è $I = -1$, quindi ha le stesse dimensioni trasverse, ma risulta invertita rispetto all'oggetto.

Soluzione esercizio 119

a. L'immagine finale è virtuale, rovesciata e risulta ingrandita.
b. L'esercizio è del tutto analogo al precedente, si danno solo i risultati numerici.
Immagine prima lente: $q_1 = 40/3\ cm$. Immagine seconda lente $q_2 = -100\ cm$
c. Ingrandimento $I_tot = -2$