

ETTORE MAJORANA E LA STRUTTURA DEI NUCLEI ATOMICI

Francesco Iachello

Yale University

Accademia Galileana 28 Marzo 2006

INTRODUZIONE

- 1932 Scoperta del neutrone (Chadwick)
Majorana lavora sulla struttura dei nuclei
Heisenberg pubblica l'articolo sulla struttura dei nuclei
- 1933 Majorana va a Lipsia presso Heisenberg
Majorana pubblica l'articolo sulla teoria dei nuclei

Über den Bau der Atomkerne.I., Von **W. Heisenberg** in Leipzig,
Eingegangen am 7. Juni 1932. [Zs.f.Phys. 78, 1 (1932).]
Über die Kerntheorie, Von **Ettore Majorana**, zur Zeit in Leipzig,
Eingegangen am 3. März 1933. [Zs.f.Phys. 81, 137 (1933).]

Heisenberg-Majorana (1932-33):

- Inizio della teoria dei **nuclei**
- Inizio della costruzione di **spazi astratti** nella descrizione dei sistemi fisici (**spin isotopico** di Heisenberg)
- Inizio dell'uso di considerazioni di **simmetria** nello studio dei sistemi a molti corpi (forze di Majorana e **simmetrie** di **permutazione**)

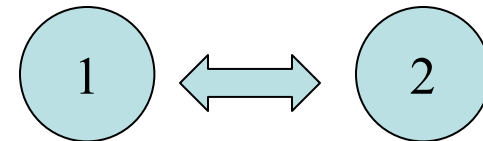
LE FORZE DI SCAMBIO

Le forze di scambio sono un concetto puramente **quantistico** che nasce dalla **indistinguibilità** di due oggetti identici.

In meccanica quantistica lo stato di un sistema di due particelle e' descritto da una funzione d'onda $\psi(1,2)$.

Gli stati di un sistema quantistico di due particelle possono essere o **simmetrici** o **antisimmetrici** per scambio delle particelle.

Stati **simmetrici** $\psi(2,1)=\psi(1,2)$
Stati **antisimmetrici** $\psi(2,1)=-\psi(1,2)$



Se introduciamo un operatore di scambio **P** tale che $P\psi(1,2)=\psi(2,1)$ abbiamo

$$P\psi_{\text{symm}} = \psi_{\text{symm}}$$
$$P\psi_{\text{asymm}} = -\psi_{\text{asymm}}$$

Se consideriamo un operatore $V = -fP$, questo agisce come una interazione tale che

$$\begin{aligned} V\psi_{\text{symm}} &= -f\psi_{\text{symm}} \\ V\psi_{\text{asymm}} &= +f\psi_{\text{asymm}} \end{aligned}$$

L'interazione è detta **forza di scambio** (o **forza di Majorana**) ed è, con la scelta del segno di cui sopra, **attrattiva** per gli stati **simmetrici** e **repulsiva** per gli stati **antisimmetrici**.

(Nella equazione di cui sopra, f può essere una funzione delle coordinate $f=f(\mathbf{r})$.)

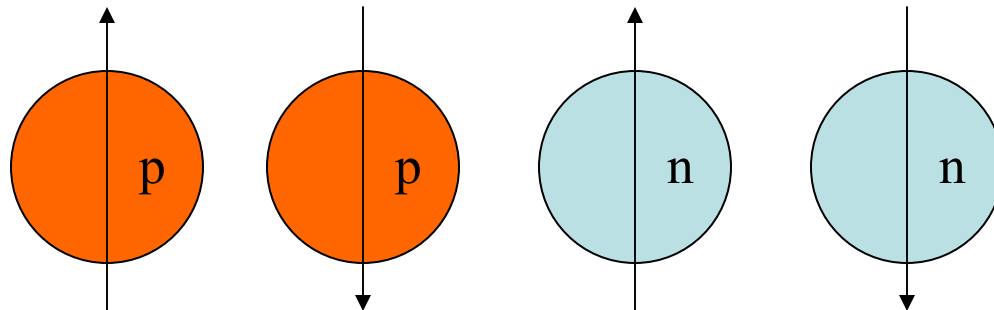
Un sistema fisico a molti corpi tende, se soggetto a forze di scambio con il segno di cui sopra, a trovarsi nello stato fondamentale in uno stato il più simmetrico possibile, visto che l'interazione è attrattiva per stati simmetrici e repulsiva per stati antisimmetrici.

LA STRUTTURA DEI NUCLEI (1932)

1932 Scoperta del **neutrone** \neq protone+elettrone
Nucleo=protoni+neutroni=nucleoni

I protoni e neutroni sono particelle che posseggono una proprieta' intrinseca detta **spin**. Lo spin, S , dei protoni e neutroni e' $S=1/2$. La loro funzione d'onda e' piu' complicata di quella descritta precedentemente. In aggiunta alle coordinate dello spazio usuale, \mathbf{r} , abbiamo anche coordinate di spin, ζ . Queste coordinate sono discrete, $\zeta=\pm 1$, e vivono in uno **spazio fittizio**.

Heisenberg e Majorana conclusero percio' nel 1932-33 che i nuclei atomici sono composti da protoni e neutroni con spin giu' e spin su.



In seguito alla presenza dello spin, le forze di scambio nei nuclei sono piu' complesse di quelle brevemente descritte sopra. Abbiamo tre tipi di forze di scambio:

$$\begin{array}{ll} \text{Heisenberg (1932)} & P^H \psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = \psi(\mathbf{r}_2, \zeta_2; \mathbf{r}_1, \zeta_1) \\ \text{Majorana (1933)} & P^M \psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = \psi(\mathbf{r}_2, \zeta_1; \mathbf{r}_1, \zeta_2) \\ \text{Bartlett (1936)} & P^B \psi(\mathbf{r}_1, \zeta_1; \mathbf{r}_2, \zeta_2) = \psi(\mathbf{r}_1, \zeta_2; \mathbf{r}_2, \zeta_1) \end{array}$$

Le interazioni tra nucleoni possono in generale essere scritte come:

$$V = V_W(r) + V_M(r)P^M + V_H(r)P^H + V_B(r)P^B$$

Empiricamente risulta che solo le forze di Wigner (non di scambio) e le forze di scambio di Majorana sono importanti.

Una ulteriore complicazione e' dovuta al fatto che il nucleo e' composto da protoni e neutroni. Ma, a parte la loro carica e una piccola differenza di massa, i **protoni** e **neutroni** sono, dal punto di vista delle interazioni forti, **particelle identiche**. Dobbiamo dunque considerare non solo forze di scambio tra protoni o tra neutroni ma anche forze scambio tra protoni e neutroni.

Per tenere in conto questa proprieta' e' conveniente introdurre un ulteriore **spazio astratto**, in aggiunta a quello dello spin, ζ , detto dello **spin isotopico**, con coordinate $\eta = \pm 1$. Il protone corrisponde a $\eta = +1$ e il neutrone a $\eta = -1$. La funzione d'onda di protoni e neutroni puo' cosi' essere scritta come $\psi(\mathbf{r}, \zeta, \eta)$ e l'elegante formalismo matematico di Heisenberg-Majorana puo' essere utilizzato per il sistema completo di protoni e neutroni con spin giu' e spin su. Lo spin isotopico, T , ha proprieta' simili a quelle dello spin ordinario, S . (In linguaggio matematico, le algebre che li descrivono sono isomorfe.) Lo spin isotopico del nucleone e' $T = 1/2$. Lo spin e spin isotopico possono essere combinati in una costruzione matematica piu' generale, detta Wigner **SU(4)**.

LA STRUTTURA DEI NUCLEI (1948)

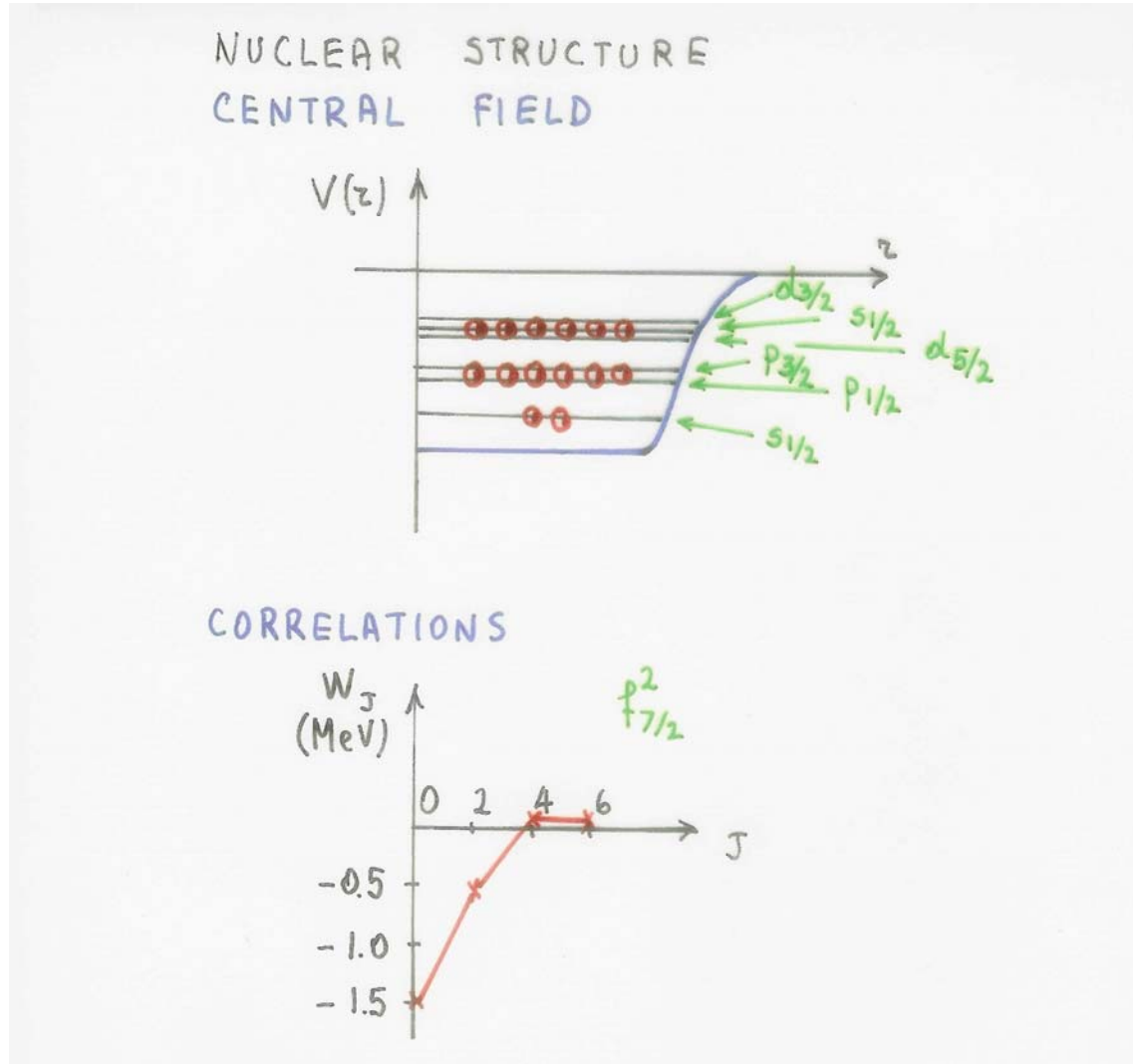
Negli anni subito dopo la seconda guerra mondiale, Jensen e Goeppert-Meyer suggerirono che il nucleo, composto da protoni e neutroni come supposto da Heisenberg e Majorana, si assembla a strati: questo modello fu detto **modello a shell**.

I protoni e neutroni si muovono nel campo medio dovuto agli altri nucleoni.

I protoni e neutroni sono soggetti a interazioni residue in aggiunta al campo medio.

Modello a shell
(Campo medio)

Interazioni residue
(Proton-protone o
neutrone-neutrone)



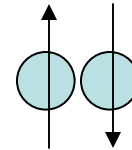
LA STRUTTURA DEI NUCLEI (1974)

Le interazioni residue hanno la proprietà di essere attrattive per $J=0$ e $J=2$, dove J è il momento angolare totale dei due nucleoni composto dal momento angolare orbitale e momento angolare di spin.

Si ha perciò la tendenza alla formazione di **coppie**, simili alle coppie di Cooper dei superconduttori. Nei superconduttori le coppie hanno momento angolare zero, e vengono dette **coppie S**. Nei nuclei si formano due tipi di coppie, **coppie S** e **coppie D** con momento angolare $J=0$ e $J=2$ rispettivamente.

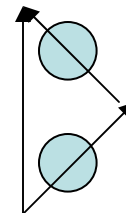
Interacting Boson Model

S-boson



$J=0$

D-boson



$J=2$

I nucleoni hanno momento angolare totale **semintero** e vengono detti **fermioni**.

Le coppie di nucleoni hanno momento angolare intero e vengono dette **bosoni**.

Nel 1974-1975 Arima e Iachello suggerirono che i nuclei con un numero pari di nucleoni possono essere descritti in termini di coppie. Siccome le coppie sono bosoni, il modello venne detto **modello a bosoni interagenti**.

Nel caso dei nuclei pesanti, a causa dell'eccesso neutronico, le coppie che si formano sono coppie di protoni e coppie di neutroni.

Le coppie (bosoni) interagiscono tra di loro con una interazione che puo' essere scritta come:

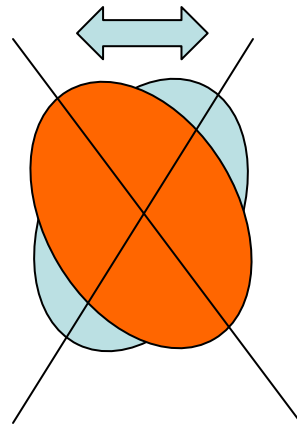
$$V = -\kappa Q \cdot Q + \lambda M$$

dove M e' l'operatore di Majorana tra coppie.

Nello stato a energia piu' bassa (detto stato fondamentale) le coppie tendono a stare in modo piu' simmetrico possibile per rispetto allo scambio di protoni e neutroni.

Stati antisimmetrici (o con simmetria mista) per rispetto allo scambio appaiono come stati eccitati. Questi stati predetti nel 1976 in base alla struttura matematica del modello e la cui energia era stata stimata in base alle forze di Majorana tra coppie essere $E=3$ MeV, sono stati scoperti nel 1984 nel nucleo ^{156}Gd a 3.07 MeV.

La loro struttura geometrica e' quella di una oscillazione angolare della densita' neutronica rispetto a quella protonica.



Come nel caso di Heisenberg-Majorana, la presenza di coppie di protoni e coppie di neutroni (**bosoni protoni** e **bosoni neutroni**) può essere descritta in modo matematicamente elegante introducendo uno **spazio astratto** detto **F-spin**, con coordinate $\rho = \pm 1$. I bosoni protoni hanno $\rho = +1$, mentre i bosoni neutroni hanno $\rho = -1$.

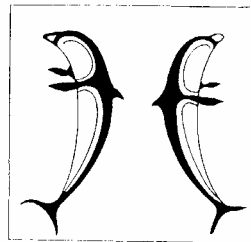
Lo stato fondamentale dei nuclei appare essere sempre lo stato con $F = F_{\max}$ (massima simmetria). Negli ultimi venti anni, stati con $F < F_{\max}$ sono stati scoperti sperimentalmente in molti nuclei.

SIMMETRIE

Uno degli aspetti fondamentali dell'articolo di Majorana da me descritto e' l'aspetto di simmetria di permutazione. Come diceva il matematico Weyl, la natura ama le simmetrie e sceglie spesso forme simmetriche. Il concetto di **simmetria**, dal greco *συμμετρος*, introdotto gia' nell'antichita' per descrivere proprieta' geometriche di artifatti,

Dal Megaron di
Tirinto (Tardo
Elladico, circa
1200 a.c.)

**Simmetria di
riflessione.**

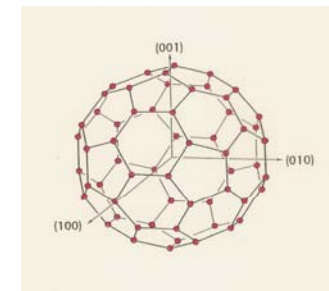


Decorazione
Sumera (circa
2000 a.c.)

**Simmetria di
traslazione.**

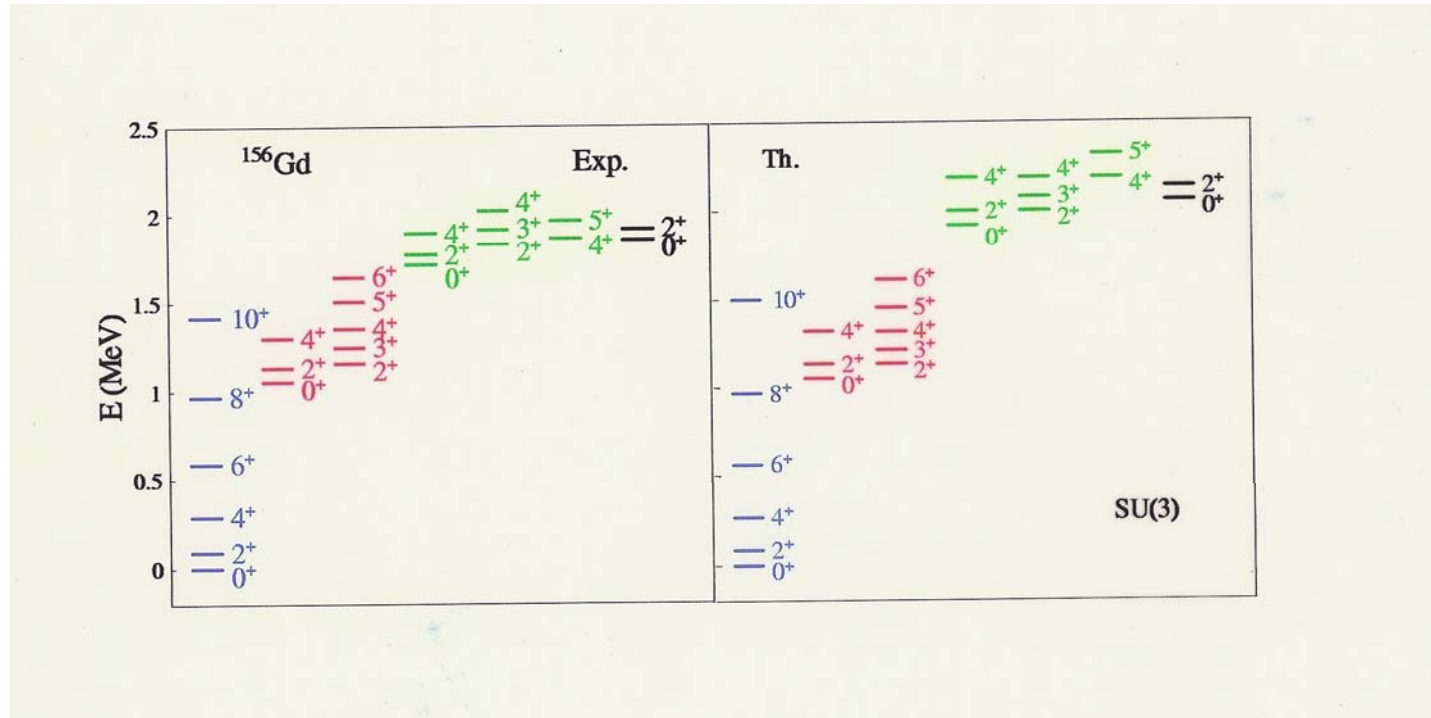
ha avuto nel ventesimo secolo uno sviluppo notevolissimo in fisica ed e' usato oggi in molti modi.

Il primo uso e' quello di **simmetrie geometriche**, come nell'arte. Esempi sono nella struttura delle molecole, dei cristalli, ecc.



In aggiunta alle **simmetrie geometriche** introdotte in fisica nel secolo diciannovesimo, alle **simmetrie di spazio-tempo**, introdotte all'inizio del secolo ventesimo, e alle **simmetrie di permutazione** sopra descritte, altri tipi di simmetria sono stati introdotti. Due in particolare hanno avuto un ruolo fondamentale in fisica: le **simmetrie di "gauge"** e le **simmetrie dinamiche**.

Le **simmetrie dinamiche** in particolare sono state molto utili nella descrizione dei **sistemi complessi**, come i nuclei atomici. Prima di concludere questa presentazione, vorrei mostrare uno di questi esempi. La simmetria dinamica si manifesta nell'ordine dei livelli di energia di un sistema quantistico. La figura della pagina successiva mostra lo spettro di energia di un nucleo complesso, ^{156}Gd . Questo nucleo non solo ha permesso di identificare gli stati a simmetria di permutazione (stati bosonici di Majorana) ma mostra anche uno spettro molto ordinato, caratterizzato da un'altra **simmetria**, questa volta di natura **dinamica** e continua, detta $\text{SU}(3)$ (simmetria di Arima-Iachello). I livelli di energia vengono classificati secondo le rappresentazioni irriducibili del gruppo $\text{SU}(3)$.



Lo spettro del ^{156}Gd è mostrato come un esempio della simmetria dinamica SU(3) nei nuclei. Le diverse rappresentazioni di SU(3) sono indicate da colori diversi.

CONCLUSIONE

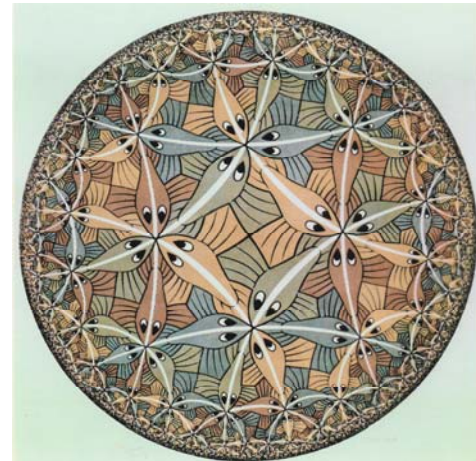
Le **forze** di **scambio** introdotte da Majorana nel 1933 hanno avuto un ruolo fondamentale nella struttura dei nuclei, sia nella formulazione originale di Heisenberg-Majorana del 1933, sia nella formulazione di Arima-Iachello del 1974.

Il **concetto** di **simmetria** e' diventato uno dei concetti basilari della fisica moderna. Nell'articolo sulle forze di scambio, Majorana uso' la **simmetria** per rispetto alle **permutazioni**. Nell'articolo sui neutrini, che verra' descritto nella presentazione seguente, Majorana uso' quella che oggi viene detta **simmetria PCT** (parity-charge conjugation-time reversal). Nell'articolo sulle equazioni a infinite componenti, che non sara' discusso in questa giornata ma che e' il terzo dei suoi grandi articoli, Majorana uso' la **simmetria** di **Lorentz** (relativistic invariance).

Le **simmetrie** di “gauge” SU(3), SU(2), U(1) sono alla base di tutti gli sviluppi recenti sulle interazioni fondamentali (forti, deboli e elettromagnetiche).

Le **simmetrie dinamiche** sono alla base di molti sviluppi nella fisica dei sistemi complessi. Esse sono state utilizzate nei nuclei (**modello a bosoni interagenti** di Arima-Iachello), nelle molecole (**modello a vibroni** di Iachello-Levine), e sono in via di applicazione in molti altri sistemi complessi (polimeri, macromolecole, condensati atomici, ecc.) come parte di un largo programma detto semplicità nella complessità (**simplicity in complexity**). Più complesso è il sistema, più importante è scoprirne la sua simmetria.

Da Escher, *Circle limit III*



Majorana ha contribuito molto all'idea che le **simmetrie** hanno un ruolo fondamentale nella descrizione della **Natura**.