

Masse e Oscillazioni dei Neutrini Lezione III

Corso di Fisica Nucleare e Subnucleare III

Lucio Ludovici 28 novembre 2008

Tipiche soglie di rivelazione dei neutrini

Processo	Esperimenti	Energia minima
$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$	Solari: Homestake	814 KeV
$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$	Solari: Gallex, Sage, GNO	233 KeV
$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$	Reattori: Chooz, Kamland	1.8 MeV
$\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$	Atmosferici., Acceler: SK, K2K, Minos,	110 MeV
$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$	Atmosferici, Acceler: SK, *BooNE,...	113 MeV
$\nu_\tau + n \rightarrow p + \tau^-$	Acceleratori: Opera, Donut	3.4 GeV
$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	Solari: SNO, SK, Borexino	~ 5 MeV (SNO, SK) ~ 0.5 MeV (Borexino)

$$E_{soglia} = \frac{(M_B + M_C)^2}{2M_A} - \frac{M_A}{2}$$

$$\nu + A \rightarrow B + C$$

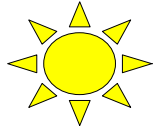
$$\sigma_{el.sc.} \sim \sigma_0 E / m_e$$

$$\sigma_0 \sim 10^{-44} \text{ cm}^2$$

A causa delle energie di soglia e di rapporto segnale/rumore
I neutrini rivelati sono sempre ultra-relativistici: $E \gg m\nu$

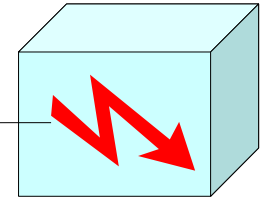
Le oscillazioni dei neutrini

sorgente di neutrini



propagazione

rivelatore



autostato α

sovrapposizione di autostati di massa

→ fasi differenti → interferenza

autostato β

di sapore definito

$\nu_\tau N \rightarrow \tau^- N'$

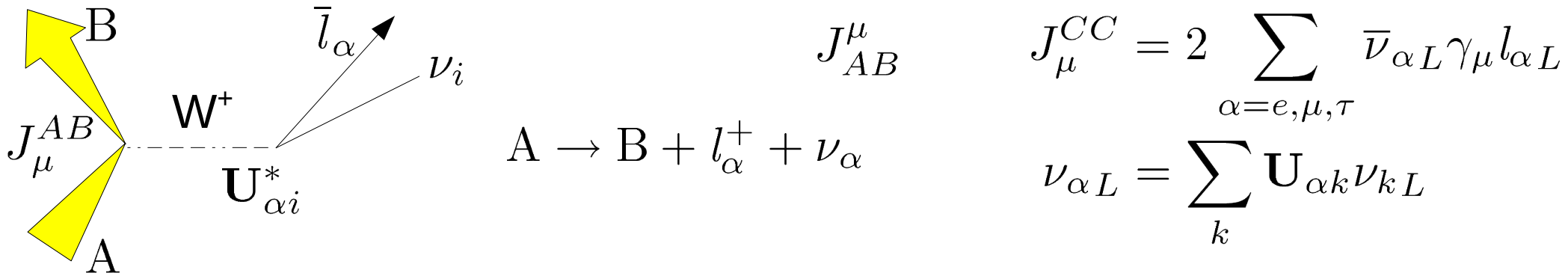
$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$

$$\begin{aligned}
 & Amp \left(\begin{array}{c} \text{B} \\ \nearrow \\ J_\mu^{AB} \\ \searrow \\ \text{A} \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \uparrow l_\alpha^+ \\ \nu_\alpha \\ \rightarrow \\ \nu_\beta \\ \uparrow l_\beta^- \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{A} \\ \searrow \\ \text{B} \end{array} \right) = \\
 & = \sum_i Amp \left(\begin{array}{c} \text{B} \\ \nearrow \\ J_\mu^{AB} \\ \searrow \\ \text{A} \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \uparrow l_\alpha^+ \\ U_{\alpha i}^* \\ \rightarrow \text{prop}(\nu_i) \\ U_{\beta i} \\ \uparrow l_\beta^- \end{array} \cdot W^+ \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{A} \\ \searrow \\ \text{B} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

N.B. Interferenza:

$$\left| \sum_i Amp \right|^2 \neq \sum_i |Amp|^2 = \sum_{i=1,3} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2$$

La probabilità di oscillazione



$$J_{AB}^{\mu}$$

$$J_{\mu}^{CC} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_{\mu} l_{\alpha L}$$

$$\nu_{\alpha L} = \sum_k U_{\alpha k} \nu_{k L}$$

Il neutrino prodotto di sapore definito è una sovrapposizione lineare degli stati massivi

$$|\nu_{\alpha}\rangle \propto \sum_{k=1,3} |\nu_k\rangle \langle \nu_k, l_{\alpha}^{+} | J_{\mu}^{CC} | 0 \rangle J_{AB}^{\mu} \longrightarrow |\nu_{\alpha}\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^{*} |\nu_k\rangle$$

$$\propto U_{\alpha k}^{*}$$

trascurando gli effetti di massa nella produzione \rightarrow neutrini ultra-relativistici

L'evoluzione nel tempo dello stato è

$$|\nu(\vec{x}, t)\rangle = e^{-i\mathbf{H}t + i\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{x}} |\nu_{\alpha}(\vec{0}, 0)\rangle \quad |\nu(L, t)\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^{*} e^{-iE_k t + ip_k L} |\nu_k\rangle$$

$$|\nu(L, t)\rangle = \sum_{k=1,3} U_{\alpha k}^{*} e^{-iE_k t + ip_k L} \sum_{\beta=e\mu\tau} U_{\beta k} |\nu_{\beta}\rangle$$

Probabilità di oscillazione

L'ampiezza della transizione $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ è

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, t) = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(L, t) \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1,3} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} e^{-iE_k t + i p_k L} \right|^2$$

Per neutrini ultra-relativistici $t = L$ e la fase dipende solo da m_k^2, E

$$E_k t - p_k L \simeq (E_k - p_k)L = \frac{E_k^2 - p_k^2}{E_k + p_k} \simeq \frac{m_k^2}{2E} \quad \text{Per una trattazione rigorosa B.Kayser Phys.Rev.D24 (1981) 110}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \left| \sum_{k=1,3} \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} e^{-i \frac{m_k^2 L}{2E}} \right|^2 \\ &= \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}} \end{aligned}$$

Con $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$, $\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$

Alcune considerazioni

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

$$\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$$

- Con tre famiglie ci sono 2 Δm_{ij}^2 indipendenti ($\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{12}^2 + \Delta m_{23}^2$)
- Oscillazione sensibili solo a Δm_{ij}^2 , non alle masse assolute
- Oscillazione richiede neutrini non degeneri
- Fenomeno quantistico di interferenza:

$$\text{se } \Delta p < \Delta m_k \longrightarrow \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 = \langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \rangle_L$$

- Le fasi di Majorana non sono osservabili nelle oscillazioni:

$$\mathbf{U}^D D = \mathbf{U}^{DIRAC} \text{diag}(1, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3})$$

$$\mathbf{U}_{\beta i} \mathbf{U}_{\alpha i}^* = \mathbf{U}_{\beta j}^D D_{ji} D_{ki}^* \mathbf{U}_{\alpha k}^D = \mathbf{U}_{\beta i}^D \mathbf{U}_{\alpha i}^{D*} \delta_{ji} \delta_{ki} e^{i(\phi_j - \phi_k)}$$

- Le oscillazioni sono descritte da 6 parametri: $\Delta m_{12}^2, \Delta m_{23}^2, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$

Alcune proprietà

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

$$\triangleright \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{W}_{kj}^{\beta\alpha*} = \mathbf{W}_{jk}^{\alpha\beta*} = \mathbf{W}_{jk}^{\beta\alpha} \quad \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta} = \mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*$$

$$\triangleright \mathbf{U} \overset{CP}{\leftrightarrow} \mathbf{U}^* \quad \mathbf{U} \overset{CPT}{\leftrightarrow} \mathbf{U}^*$$

$$\nu \leftrightarrow \bar{\nu} \quad \nu \leftrightarrow \bar{\nu}$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta$$

➤ Per invarianza sotto CPT (e come è facile verificare direttamente):

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\beta} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}} \quad \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}} \quad \text{prob. di sopravvivenza}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}} \equiv \mathcal{P}_{\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}}$$

➤ Nel caso di invarianza sotto CP ($\delta = 0$, $\mathbf{U}_{\alpha k}$ reali)

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k \mathbf{U}_{\alpha k}^2 \mathbf{U}_{\beta k}^2 + 2 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \cos \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right)$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \mathbf{U}_{\alpha k} \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right)$$

Altre forme della probabilità di oscillazione

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} \mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta(*)} e^{-i \frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}}$$

Separando i contributi della parte reale e immaginaria di $\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}$ evidenzia le parti CP-pari e CP-dispari

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 |\mathbf{U}_{\beta k}|^2 + 2 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \cos\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

$$\mathcal{P}_{\nu_{\alpha}^{(-)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(-)}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} + 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right) + 2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)$$

Asimmetria di CP

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} - \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}}$$

$$A_{\alpha\beta}^{CP} = \frac{2 \sum_{k>j} \Im\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}\right)}{\delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \Re\{\mathbf{W}_{kj}^{\alpha\beta}\} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E}\right)}$$

Invariante di Jarsholg $J_{\alpha\beta;kj} = \Im\{\mathbf{U}_{\alpha k}^* \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha j} \mathbf{U}_{\beta j}^*\} = \pm \mathbf{J}$

Analogo all'area dei triangoli unitari in CKM: $\mathbf{J}^{\text{CKM}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13}^2 s_{13} \sin \delta = \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \\ &= \frac{1}{8} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{13} \cos \theta_{13} \sin \delta \approx 0.23 \sin \theta_{13} \sin \delta \\ &\quad \approx 0.9 \quad \approx 1 \quad \approx 1 \end{aligned}$$

La possibilità di misurare ~~CP~~L è legata al valore di θ_{13}

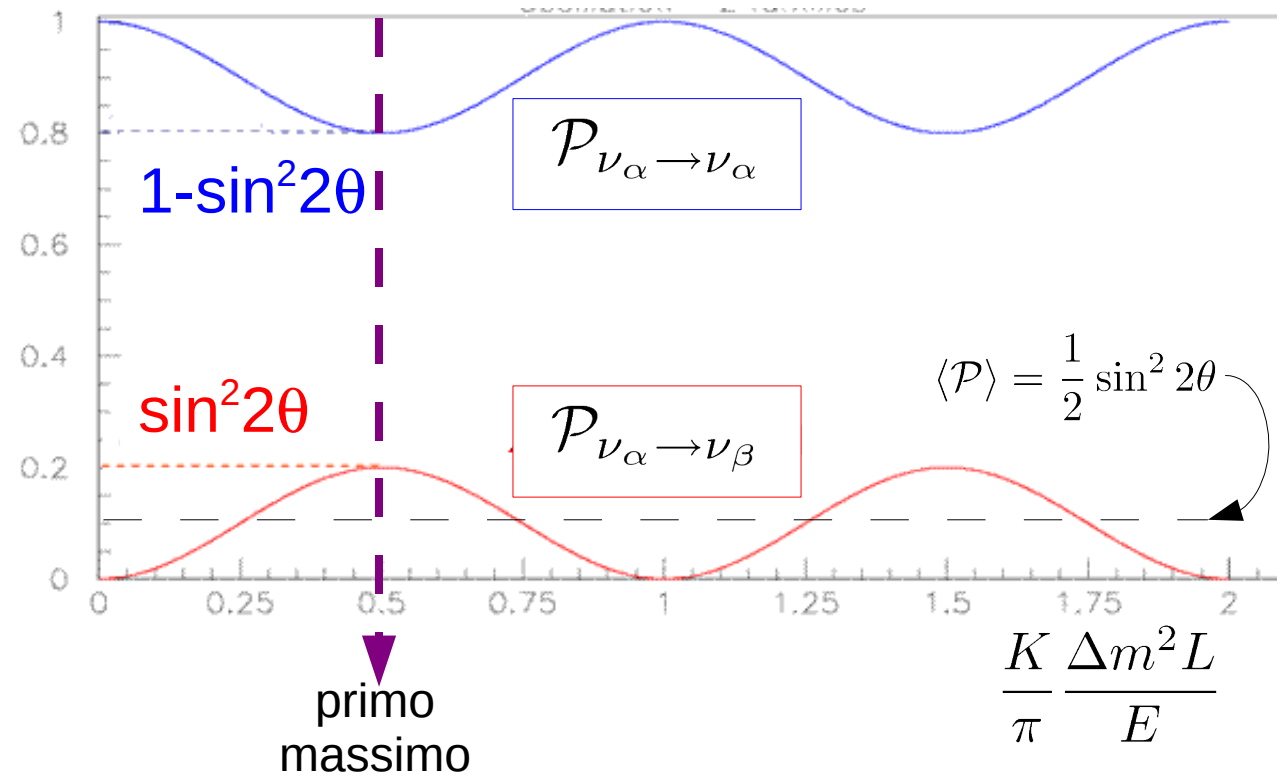
Probabilità di oscillazione a 2 famiglie

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$$

Importante storicamente e nella pratica degli esperimenti di oscillazione
 Approssimazione delle formule generali valida in molti casi

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m^2 L}{4E} &= \frac{1}{\hbar c} \frac{\Delta m^2 L}{4E} = K \frac{\Delta m^2 L}{E} \\ &\simeq 1.27 \frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{Km}]}{E [\text{GeV}]} \end{aligned}$$



ESEMPIO

Il primo massimo di oscillazione
 con $\Delta m^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{eV}^2$
 $E = 1 \text{ GeV}$

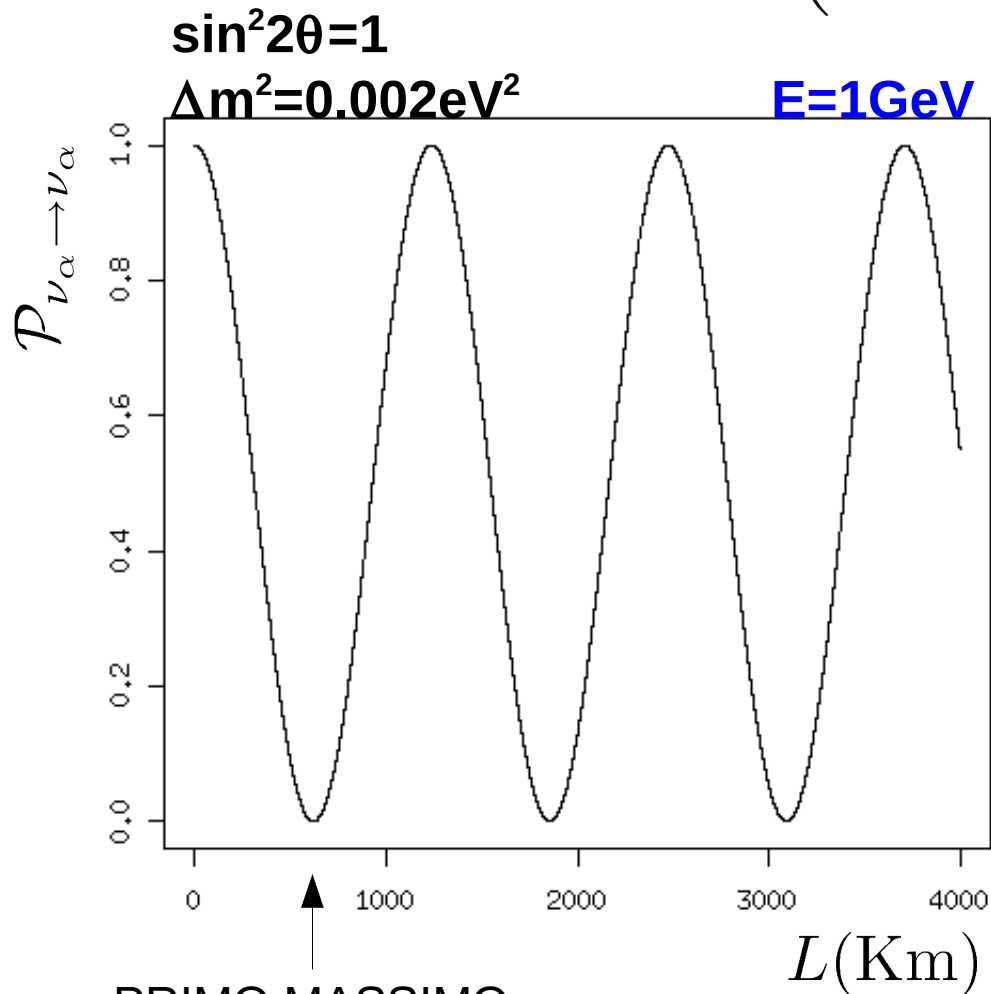
si ha per

$$L = \frac{\pi}{2} \frac{E [\text{GeV}]}{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2]} = 618 \text{ Km}$$

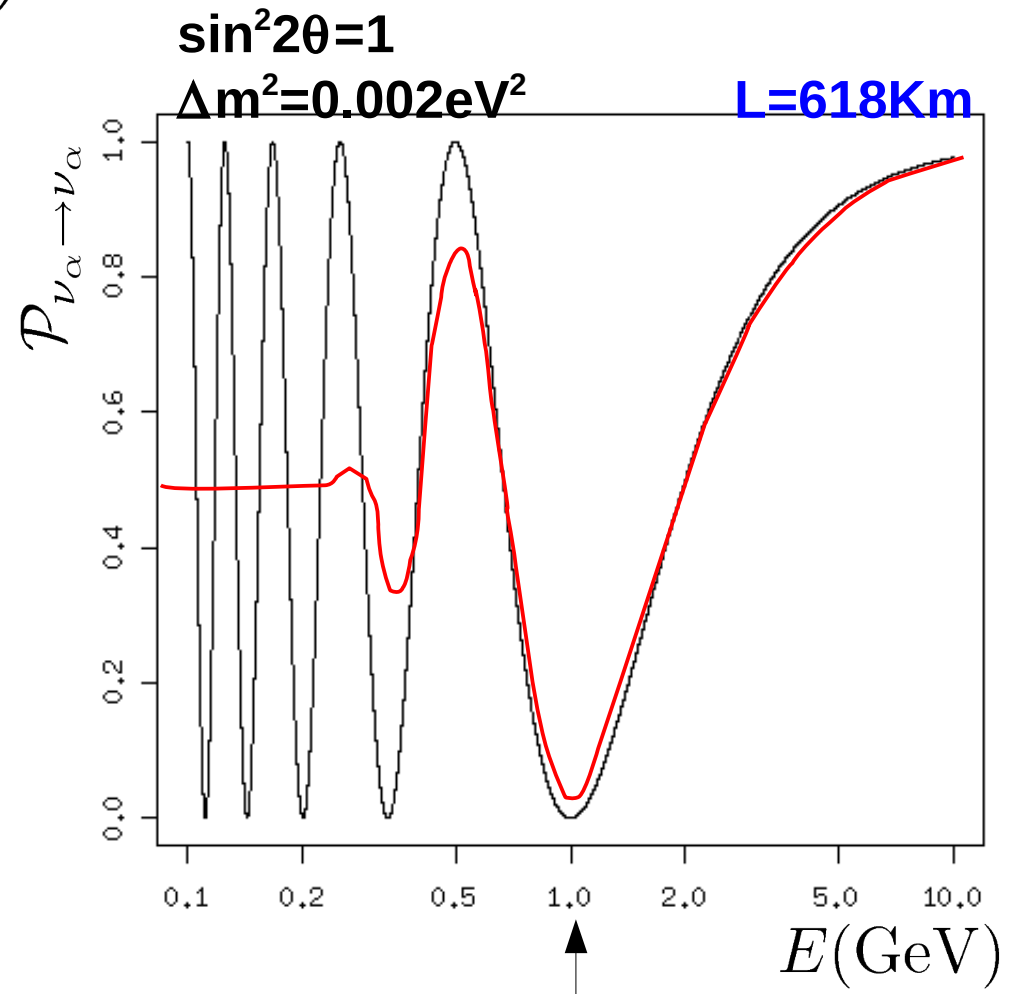
Dipendenza da L, E

Probabilità di sopravvivenza

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$



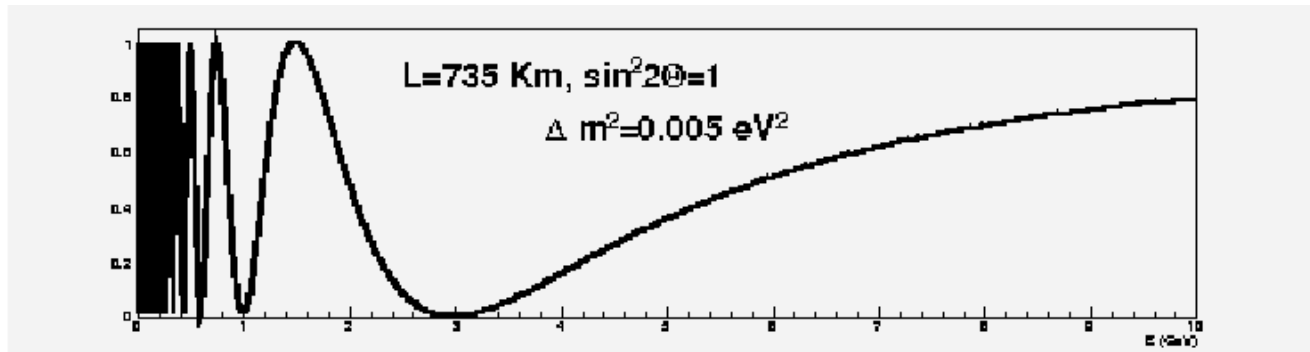
PRIMO MASSIMO
DI
OSCILLAZIONE



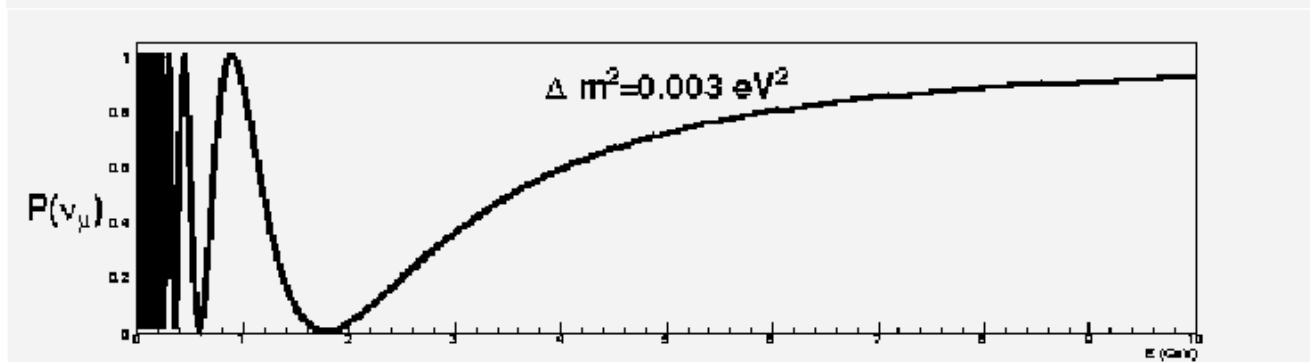
PRIMO MASSIMO
DI
OSCILLAZIONE

Dipendenza da E

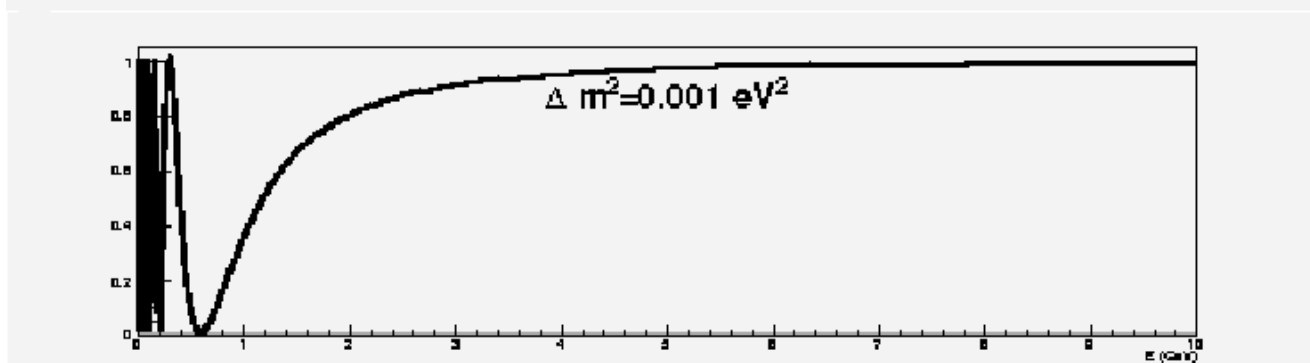
L=735 Km



$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.005$ eV²

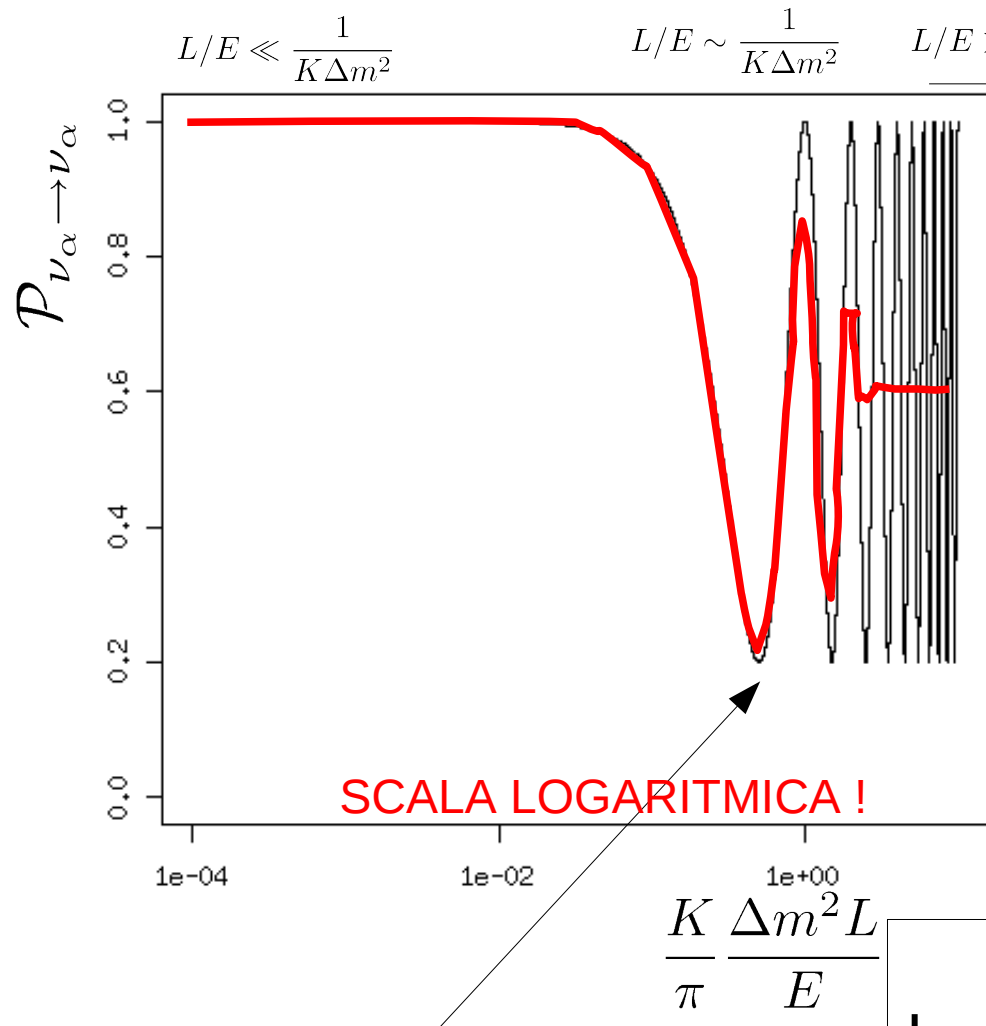


$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.003$ eV²



$\sin^2 2\theta=1$
 $\Delta m^2=0.001$ eV²

Sensibilità alle oscillazioni



$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$

- $L/E \ll \frac{1}{K\Delta m^2}$ le oscillazioni non hanno “tempo” di svilupparsi
- $L/E \simeq \frac{1}{K\Delta m^2}$ massimo della sensibilità
- $L/E \gg \frac{1}{K\Delta m^2}$ la risoluzione impedisce di risolvere le oscillazioni:
→ si misura $\langle \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \rangle$

Massimo della sensibilità

$$L/E = \frac{\pi}{2K\Delta m^2}$$

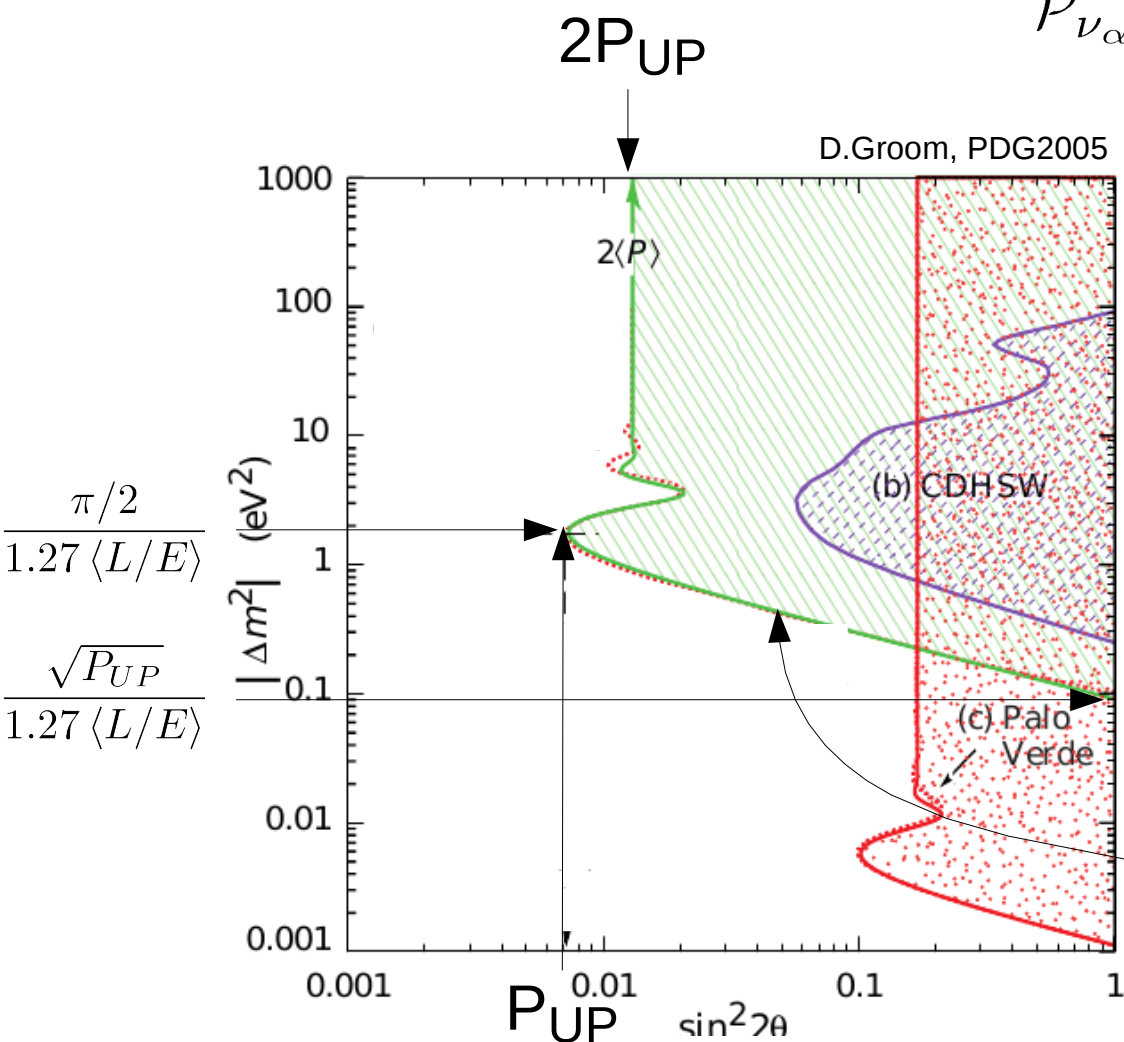
RISOLUZIONE L/E

L → sorgente estesa (atmosfera, sole, tunnel di decadimento,...)

E → misurata con $\Delta E/E$ o talvolta non misurata, sorgente con spettro esteso

Interpretazione del plot Δm^2 vs $\sin^2 2\theta$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right)$$



Ricerca negativa:

$P < P_{UP}$ al 90%CL

upper limit \rightarrow plot di esclusione

Ricerca positiva:

$P_{MIN} < P < P_{MAX}$ al 90%CL

scoperta \rightarrow plot di inclusione

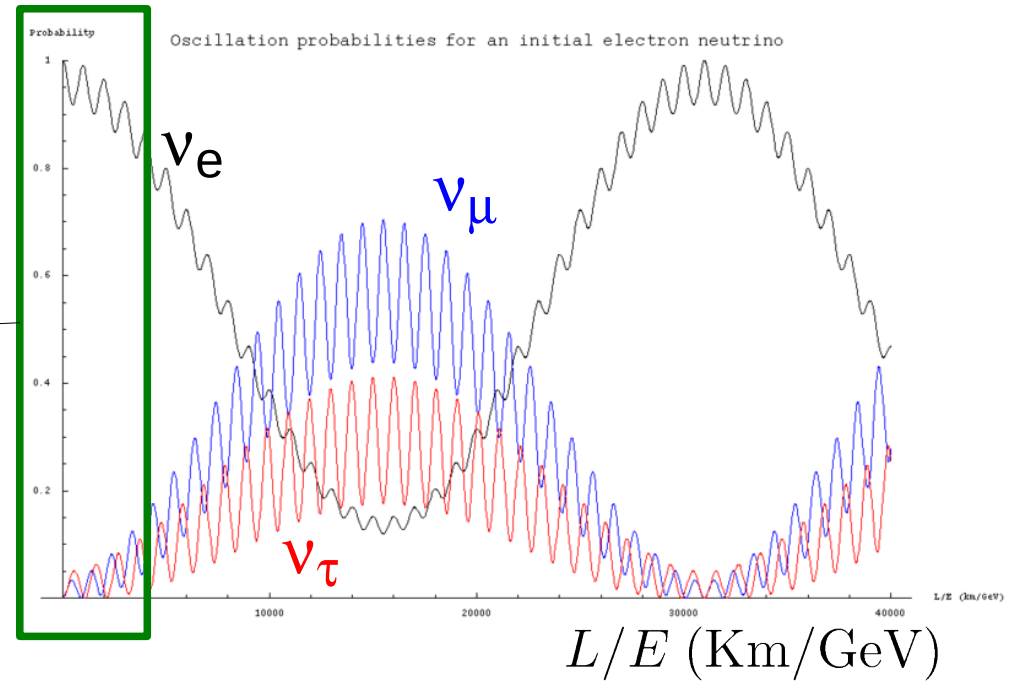
\rightarrow Curve di iso-probabilità

Per $\frac{\Delta m^2 L}{E} \ll 1$ $P < P_{UP}$ diventa

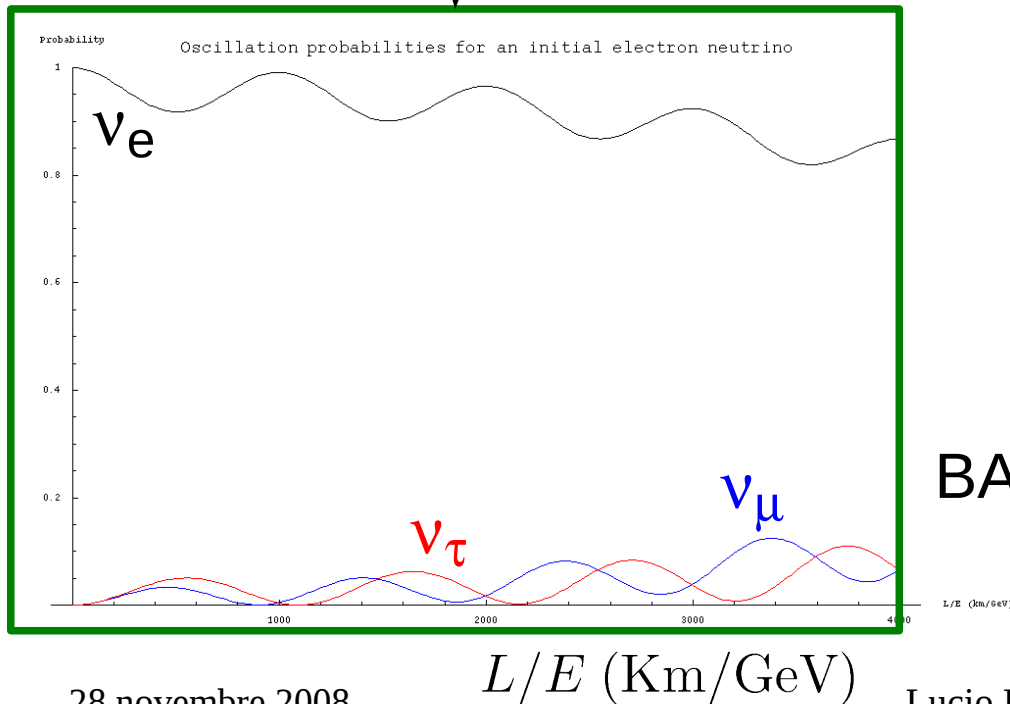
$$\sin^2 2\theta \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)^2 < P_{UP}$$

$$\Delta m^2 = \frac{\sqrt{P_{UP}}}{1.27 \langle L/E \rangle \sqrt{\sin^2 2\theta}}$$

Probabilità di oscillazione ν_e

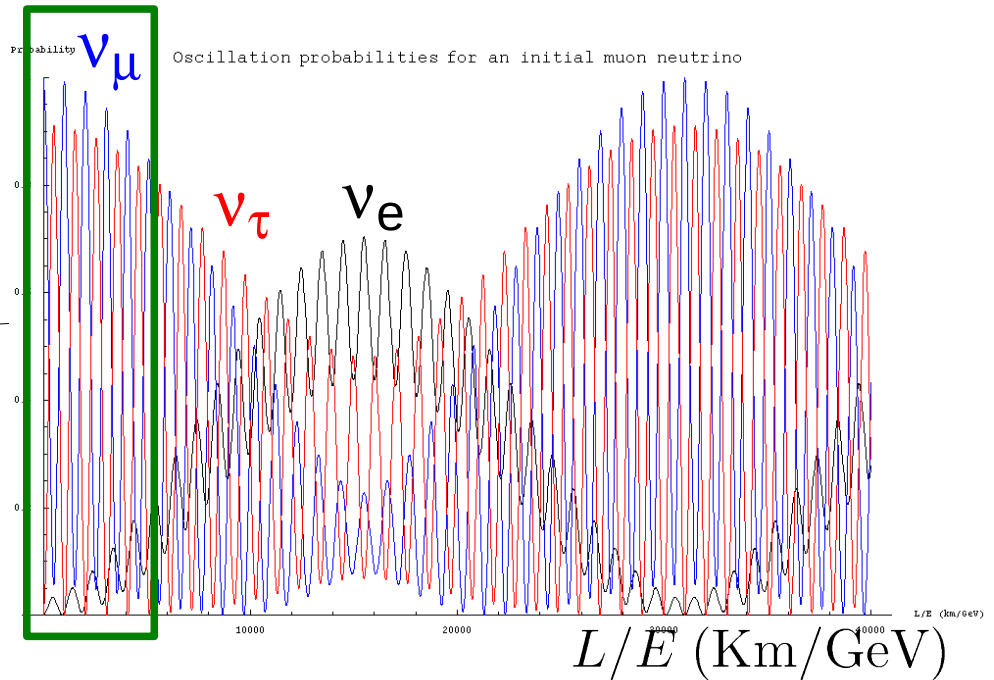


BASELINE LUNGA

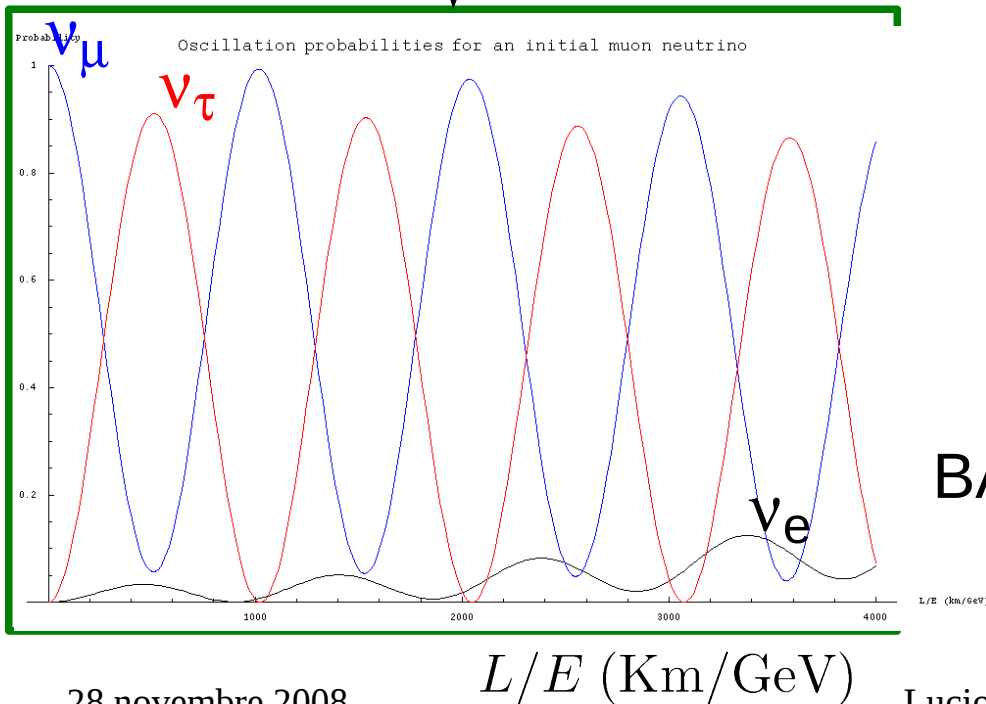


BASELINE CORTA

Probabilità di oscillazione ν_μ

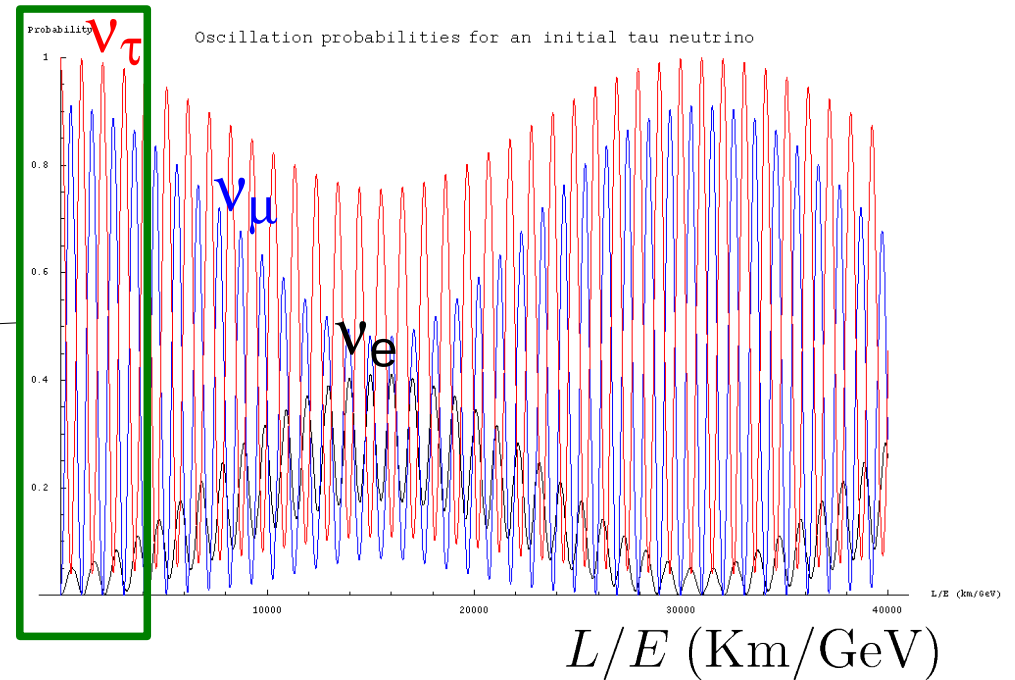


BASELINE LUNGA

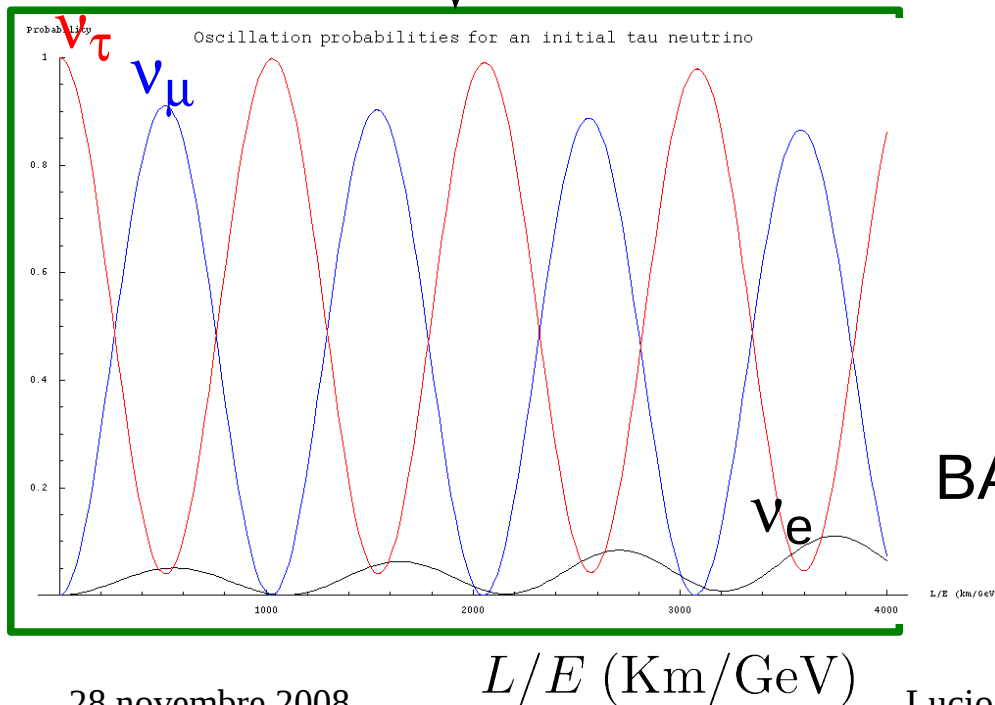


BASELINE CORTA

Probabilità di oscillazione ν_τ



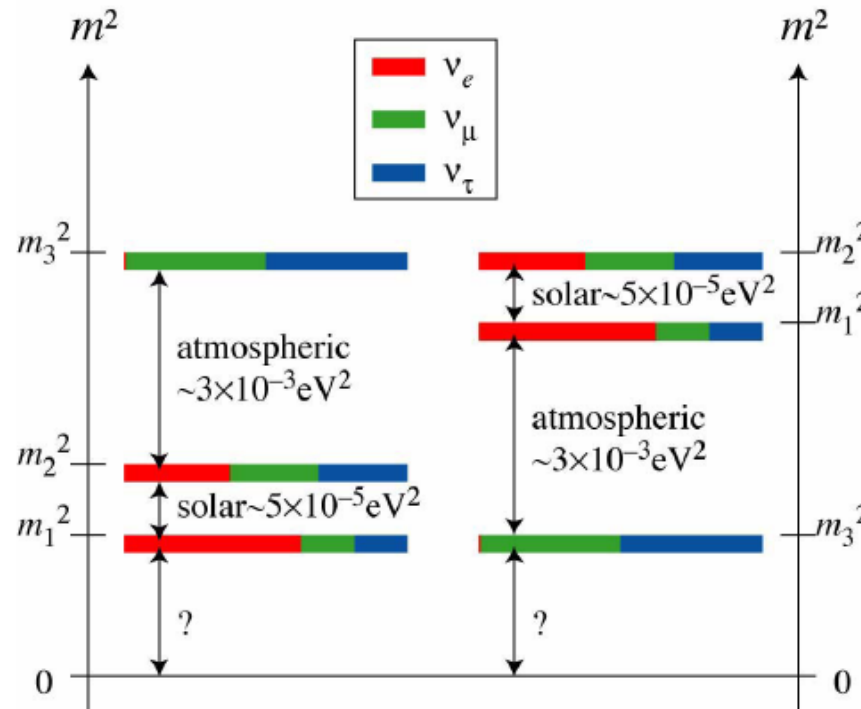
BASELINE LUNGA



BASELINE CORTA

One mass-scale dominance: $\Delta m^2_{23} \gg \Delta m^2_{12}$

In molti casi, un esperimento con L/E vicino al massimo di sensibilità per un certo Δm^2 , ha un effetto costante (indipendente da L/E) dall'altro Δm^2



$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \simeq S_{\alpha\beta} \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$S_{\alpha\beta} = 4 \left| \sum \mathbf{U}_{\alpha i}^* \mathbf{U}_{\beta i} \right|^2$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} \simeq 1 - 4T_\alpha (1 - T_\alpha) \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \right)$$

$$T_\alpha = \sum |\mathbf{U}_{\alpha i}|^2$$

Formule approssimate della stessa forma della formula di oscillazione per 2 neutrini

→ Parametri efficaci

Formule approssimate

Esperimenti a distanze terrestri, con $\Delta m_{12}L/E \ll 1$, sono descritti solo da 3 parametri: θ_{23} , Δm_{12} , θ_{13} e da formule simili a quelle per 2 famiglie:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \cong \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu e} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{\mu\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau) \cong \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23} = \sin^2 2\theta_{e\tau} \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \cong 1 - (\sin^2 2\theta_{\mu\tau} + \sin^2 2\theta_{\mu e}) \sin^2 \Delta_{23}$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \cong 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \Delta_{23}$$

Angoli di mixing efficaci:

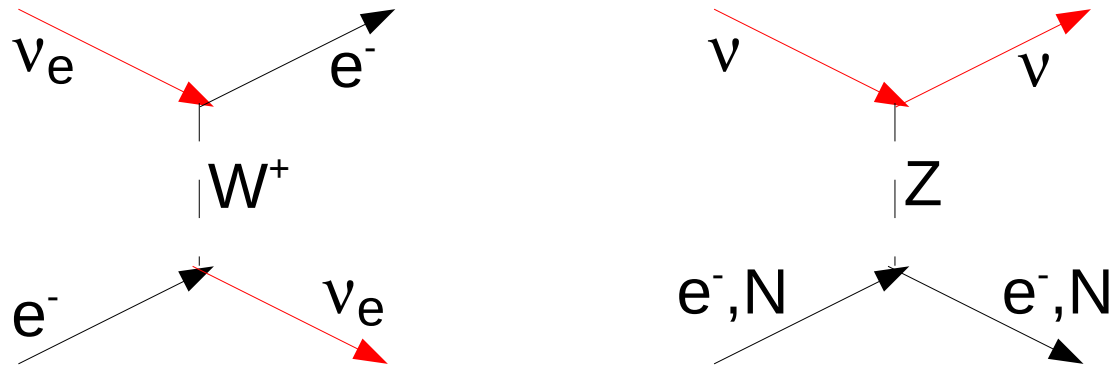
$$\sin^2 2\theta_{\mu e} = \sin^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

$$\sin^2 2\theta_{\mu\tau} = \cos^4\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \cong \sin^2 2\theta_{23}$$

$$\sin^2 2\theta_{e\tau} = \cos^2\theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} \cong 0.5 \sin^2 2\theta_{13}$$

Oscillazioni nella materia (effetto MSW)

- Nella materia la propagazione dei neutrini è alterata dallo scattering elastico in avanti. Se l'effetto fosse lo stesso per tutti i sapori, non ci sarebbe un effetto sulle oscillazioni:



- Tutti i neutrini hanno interazioni elastiche di corrente neutra mentre i neutrini elettronici hanno anche interazioni elastiche di corrente carica con gli elettroni del mezzo attraversato.

vuoto $|\nu(t)\rangle = e^{i(px-Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2t/2E} |\nu\rangle$

materia $|\nu(t)\rangle = e^{i(np_x-Et)} |\nu\rangle \simeq e^{-im^2t/2E + \sqrt{2}G_F n_e} |\nu\rangle$

“indice di rifrazione” $n = 1 + V_W/p$

$$V_W = \sqrt{2}G_F n_e \approx 7.6 \cdot 10^{-14} \frac{Z}{A} \rho [\text{g/cm}^3] eV$$

n_e : electron number density

MSW per due famiglie

Nel formalismo hamiltoniano l'evoluzione dello stato di sapore per due famiglie nel vuoto è

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{bmatrix} = H_V \begin{bmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \end{bmatrix}$$

$$H_V = U H U^\dagger = \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} + \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

↑
 proporzionale all'identità
 → fase irrilevante per le oscillazioni

H°

soluzione eq. secolare:

$$\tan 2\theta = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}}$$

Aggiungendo il termine di materia:

$$\sqrt{2} G_F n_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

equivalenti a meno di
 un termine proporzionale
 all'identità

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La risonanza MSW

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Nella materia l'angolo di mescolamento diventa:

$$\tan 2\theta_M = \frac{2H_{21}}{H_{22} - H_{11}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - A}$$

$$A = 2\sqrt{2}G_F n_e E$$

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}$$

Per $A = \Delta m^2 \cos 2\theta$ si ha $\theta_M = \pi/4$ (cioè mescolamento massimo) anche per θ piccoli (risonanza MSW)

$$n_e = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F E} \approx 1.3 \cdot 10^{25} / \text{cm}^3 \approx 22 \text{g}/\text{cm}^3$$

Densità del nucleo solare:
150 g/cm³

Per $\theta = 32.5^\circ$, $\Delta m^2 = 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, e un neutrino di 10 MeV

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{g}$$