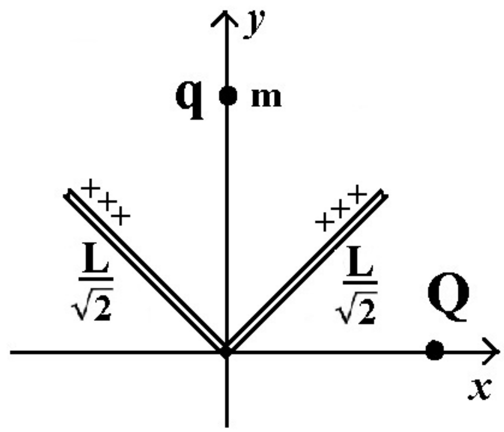
Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 14/11/2014

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Due aste di lunghezza $L/\sqrt{2}$ giacenti nel piano xy hanno un estremo nell'origine e formano un angolo di 45^o con l'asse delle x, vedi figura. Le aste sono uniformemente cariche con la stessa densità lineare $\lambda > 0$.



a) Si dimostri che il potenziale in un generico punto $(0, y, 0)$ del semiasse delle y *positive* è dato da

$$\varphi(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\, arcsenh\left(\frac{L}{y} - 1\right).$$

Suggerimento: si notino la primitiva $\int du/\sqrt{1+u^2} = arcsenh(u)$ e l'identità $arcsenh(u) = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$.

b) Si determini il campo elettrico $\vec{E}(y)$ in un generico punto del semiasse delle y positive e si verifichi che per $y \gg L$ abbia il corretto andamento asintotico.

c) Una particella di massa m e carica $q > 0$, vincolata all'asse *verticale* delle y, si trova inizialmente nel punto $(0, L, 0)$ con velocità nulla, iniziando a muoversi verso il basso sotto l'influenza della forza peso. Si scriva l'equazione che determina la posizione y^* più bassa che raggiunge. Si descriva qualitativamente il moto della particella per tutti gli istanti successivi.

d) Quanto deve valere la carica Q di una sferetta posta nel punto $(L, 0, 0)$, affinché il modulo del campo elettrico totale creato da Q, q e dalle due aste, per $|\vec{x}| \gg L$ decresca come $E(\vec{x}) \sim 1/|\vec{x}|^3$?

Problema B

a) Sull'asse z è disposta una distribuzione filiforme infinitamente estesa di carica di densità lineare $\lambda > 0$. Su due superfici cilindriche infinitamente estese, coassiali con l'asse z e di raggi rispettivamente $2R$ e $3R$, sono disposte distribuzioni superficiali uniformi di carica, la densità superficiale del cilindro esterno essendo $\sigma_3 = -\frac{\lambda}{6\pi R} < 0$. Misurando il campo elettrico nel punto $P = (3R/2, 3R/2, 4R)$ si trova il valore $\vec{E}(P) = 0$. Si introduca la coordinata radiale *cilindrica* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Si determini la densità superficiale di carica σ_2 del cilindro interno.

b) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ in tutto lo spazio imponendo che si annulli nel punto P, distinguendo le regioni $r < 2R$, $2R < r < 3R$ e $3R < r$. Si tracci qualitativamente il grafico della funzione $\varphi(r)$.

c) Si determini la densità di energia elettrostatica $w_e(A)$ nel punto $A = (5R/2, 5R/2, R)$.

d) Accendendo anche un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B}$ si osserva che una particella di carica q compie un moto oscillatorio rettilineo radiale passando per i punti $P_1 = (R, R/2, 0)$ e $P_2 = (4R, 2R, 0)$, attraversando i cilindri in due piccoli fori. Trascurando la forza peso si determinino il segno di q e il versore del campo magnetico $\vec{n} = \vec{B}/B$.

Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 14/11/2014

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si definisca il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ di un sistema di cariche puntiformi e si derivi l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ a grandi distanze dal sistema in termini di $\vec{p}$ e della carica totale Q. Si motivino le approssimazioni fatte, specificando in particolare l'ordine dell'errore del risultato finale.

1b) Si scrivano le equazioni fondamentali dell'Elettrostatica e le si risolvano, dimostrando che sotto opportune condizioni la soluzione $\vec{E}(\vec{x})$ è unica. Si derivi l'andamento a grandi distanze di $\vec{E}(\vec{x})$ per una distribuzione continua di carica a supporto compatto.

1c) Si determini l'espressione dell'energia elettrostatica U_e di un sistema di cariche puntiformi a partire dalla legge di Coulomb e si spieghi il suo legame con il lavoro compiuto dal campo elettrico. Qual è l'espressione dell'energia meccanica conservata di un sistema di cariche puntiformi in presenza di un campo elettrostatico esterno?

Gruppo 2

2a) Quali sono le caratteristiche sperimentali della forza magnetica agente su una particella con carica q e velocità $\vec{v}$? Si derivi la seconda legge elementare di Laplace dall'espressione della forza di Lorentz. Qual è l'espressione della forza magnetica agente su una piccola spira di momento magnetico $\vec{\mu}$? Se il campo magnetico è uniforme, in che senso tale espressione è in accordo con la seconda legge elementare di Laplace?

2b) Si derivino le caratteristiche principali di un conduttore elettrostatico, rispondendo in particolare alle domande: dove si situano le cariche? Qual è la direzione del campo elettrico sul bordo del conduttore? Qual è il legame tra il campo elettrico e la densità superficiale di carica? In che cosa consiste il fenomeno della *gabbia di Faraday* e come lo si dimostra?

2c) Come si definisce il momento magnetico $\vec{\mu}$ associato a una generica densità di corrente $\vec{j}$? Si determini l'espressione di $\vec{\mu}$ per una spira percorsa da corrente. Si determini il momento delle forze magnetiche $\vec{M}$ agente su una piccola spira percorsa da corrente in termini di $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$, motivando le approssimazioni fatte.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Il potenziale delle due aste si può scrivere come

$$\varphi(y) = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/\sqrt{2}} \frac{\lambda ds}{\sqrt{\frac{s^2}{2}+\left(y-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/\sqrt{2}} \frac{ds}{\sqrt{\frac{y^2}{2}+\left(s-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(arcsenh\left(\frac{L}{y}-1\right)+\ln(\sqrt{2}+1)\right)$$

b) Per motivi di simmetria si ha $\vec{E}(y) = (0, E_y(y), 0)$, con

$$E_y(y) = -\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2+(y-L)^2}}.$$

Per $y \gg L$ si ha (la carica totale delle due aste vale $Q_a = \sqrt{2}\lambda L$)

$$E_y(y) \to \frac{\lambda L}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 y^2} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}|^2}.$$

c) Dalla conservazione dell'energia meccanica si trova

$$mgL = mgy^* + \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\, arcsenh\left(\frac{L}{y^*}-1\right).$$

Analizzando la forma del potenziale totale $mgy+q\varphi(y)$ si trova che la particella oscilla tra le posizioni $y = L$ e $y = y^*$.

d) $Q + q + Q_a = 0$, da cui $Q = -q - \sqrt{2}\lambda L$.

Problema B

a) Visto che $r_P = 3\sqrt{2}R/2$ il punto P si trova tra le due superfici cilindriche ed essendo $\vec{E}(P) = 0$, nella regione $2R < r < 3R$ il campo elettrico è nullo. Dal teorema di Gauss segue allora $\sigma_2 = -\lambda/4\pi R$.

b) Applicando il teorema di Gauss, per la componente radiale $E(r)$ del campo elettrico si ottiene

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r < 2R, \\ 0, & 2R < r < 3R, \\ -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, & 3R < r. \end{cases}$$

Da $E(r) = -\partial\varphi(r)/\partial r$ e $\varphi(r_P) = 0$ si trova quindi

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{2R}, & r < 2R, \\ 0, & 2R < r < 3R, \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{3R}, & 3R < r. \end{cases}$$

c) Visto che $r_A = 5R/\sqrt{2} > 3R$ si ha

$$w_e(A) = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(r_A) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r_A^2} = \frac{\lambda^2}{100\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

d) Deve essere $q > 0$ e $\vec{B} \parallel \vec{v}$, da cui $\vec{n} = \pm(2,1,0)/\sqrt{5}$.