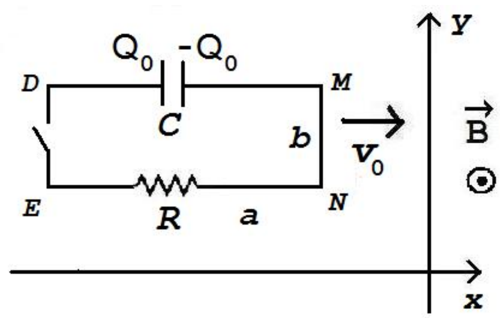
Secondo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 15/01/2014

Problemi

Problema A

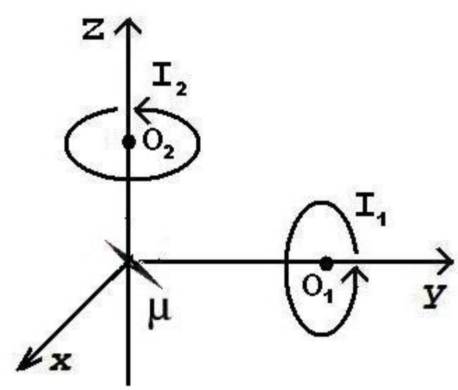
In una spira conduttrice rettangolare di lati a e b e massa m, vincolata al piano xy, sono inseriti un condensatore di capacità C e una resistenza R. Nella regione delle x positive vi è un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $B > 0$. Inizialmente la spira si trova nella regione delle x negative e avanza con velocità costante $v_0 > 0$ in direzione x, l'interruttore è aperto e il condensatore possiede carica $Q_0 > 0$, vedi figura. All'istante $t = 0$ il lato MN attraversa l'asse y e allo stesso istante si chiude l'interruttore. Sia T l'istante al quale il lato DE attraversa l'asse y. Si assumano note le grandezze m, B, R, C, b, Q_0 e v_0.



a) Si determini la corrente $I(0)$ immediatamente dopo la chiusura del circuito, specificando per quali valori dei parametri essa circola in senso *orario*.
b) Si determini il tempo caratteristico τ del processo.
c) Si determini la carica $Q(t)$ a un generico istante $t < T$.
d) Supponendo noto il calore $W > 0$ che si dissipa nella resistenza per effetto Joule tra gli istanti $t = 0$ e $t = \infty$, si determini la velocità a regime v_∞ della spira.

Problema B

Due spire conduttrici di raggio R hanno i centri rispettivamente nei punti $O_1 = (0, \sqrt{8}R, 0)$ e $O_2 = (0, 0, \sqrt{3}R)$. La prima giace in un piano parallelo al piano xz ed è percorsa da una corrente $I_1 > 0$ con verso concorde con l'asse y e la seconda giace in un piano parallelo al piano xy ed è percorsa da una corrente $I_2 > 0$ con verso concorde con l'asse z. Nell'origine si trova un piccolo ago magnetico il cui momento magnetico in modulo vale μ.



a) Si dimostri che una generica spira circolare percorsa da corrente genera sul suo asse il campo magnetico, con ovvio significato dei simboli,

$$B_s(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

b) Sapendo che la direzione di equilibrio dell'ago forma un angolo di 60^o con l'asse y, si determini il valore *numerico* del rapporto I_2/I_1.
c) Si supponga ora che nella prima spira non passi corrente, $I_1 = 0$, e che l'ago possa scivolare senza attrito lungo l'asse *verticale* z, essendo diretto sempre lungo l'asse delle z *decrescenti*. Sapendo che l'ago resta in equilibrio nel punto $P = (0, 0, a)$, e considerando noti I_2, R, μ ed a, si determini la massa m dell'ago. Il punto P è situato sopra o sotto O_2?

Secono compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 15/01/2014

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Gruppo 1

1a) Si scrivano le equazioni fondamentali della *magnetostatica* in forma differenziale e integrale e le si risolvano derivando per $\vec{B}$ una rappresentazione integrale in termini di $\vec{j}$. Per quale motivo si può imporre *la gauge di Coulomb* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$? Come decresce in generale il campo magnetico a grandi distanze dalle correnti? La rappresentazione di $\vec{B}$ derivata è in accordo con tale andamento?

1b) Si determini una base completa di soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Quali sono le osservazioni sperimentali che hanno portato Maxwell a identificare la luce come un fenomeno elettromagnetico? Cosa hanno invece dimostrato gli esperimenti di Hertz?

1c) Cosa si sfrutta rispettivamente per derivare le equazioni a) $\partial w_{em}/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ e b) $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\, d^3x = \frac{d}{dt} \sum_{j \in V} \varepsilon_j$? A partire da tali equazioni si discuta la conservazione locale e globale dell'energia in Elettrodinamica in presenza di N particelle cariche. Si discuta molto brevemente la conservazione dell'energia nel caso di un'onda piana monocromatica, valutando in particolare esplicitamente il *vettore di Poynting* $\vec{S}$.

Gruppo 2

2a) Si derivi il fenomeno della *relatività della simultaneità* e si dimostri che particelle con velocità superiori alla velocità della luce violano la causalità. Si discuta molto brevemente il significato di tali fenomeni. Come imposterebbe la derivazione delle trasformazioni di Lorentz speciali?

2b) Si enuncino i *postulati della Relatività*, confrontandoli con quelli della Fisica Newtoniana. Si enunci il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, illustrandone il significato e spiegando il modo in cui intervengono i postulati nella sua dimostrazione. Da tale teorema si deduca che le trasformazioni da un sistema di riferimento a un altro sono *trasformazioni di Poincaré*.

2c) Si illustrino molto brevemente il significato e l'importanza del concetto della *covarianza a vista*. Si scrivano le *equazioni di Maxwell* e l'*equazione di continuità* per la carica elettrica in forma covariante a vista. Si verifichi che la *legge di Faraday* segue da tali equazioni. Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione del campo elettrico da un sistema di riferimento inerziale a un altro?

2d) Qual è il significato del *campo di dipolo magnetico*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right), \quad r = |\vec{x}| \tag{1}$$

e quali sono le sue caratteristiche. Per quale motivo tale formula è in apparente contraddizione con l'espressione generale di $\vec{B}$ in termini di $\vec{j}$? Si usi la (1) per verificare che poli dello stesso tipo di due magneti si respingono mentre un polo nord e un polo sud si attraggono.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Indicando con $x(t) \equiv x$ la distanza del lato MN dall'asse y, per $0 \leq t \leq T$ il flusso del campo magnetico attraverso la spira – orientata in senso orario – vale $\Phi = -bBx$, sicché $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = bBv$. Chiamando $I(t) \equiv I$ la corrente che circola in senso orario, sicché $\dot{Q} = I$, l'equazione del circuito per i valori suddetti di t è

$$\mathcal{E} = bBv = RI + \frac{Q}{C}. \tag{2}$$

Per $t = 0^+$ si ottiene quindi

$$I(0) = \frac{bBv_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}$$

e $I(0) > 0$ se $CbBv_0 > Q_0$.

b) La forza agente in direzione x sul lato MN è $F = -IbB$. Confrontando l'equazione di Newton $m\dot{v} = -IbB$ con la derivata della (2) si ottiene

$$\dot{I} + \frac{I}{\tau} = 0, \qquad \tau = \frac{mCR}{m + Cb^2B^2}, \qquad I(t) = I(0)\, e^{-t/\tau}.$$

c) Da $I = \dot{Q}$, con $Q(0) = Q_0$ e $\dot{Q}(0) = I(0)$, si ricava $Q(t) = Q_0 + \tau I(0)(1 - e^{-t/\tau})$.

d) Dopo che il lato DE ha attraversato l'asse y si ha $\mathcal{E} = 0$ e $F = 0$, la spira procede con la velocità costante v_∞ e il condensatore si scarica completamente, $Q_\infty = 0$, con tempo caratteristico $\tau = RC$. Applicando la conservazione dell'energia tra gli istanti $t = 0$ e $t = \infty$

$$\frac{1}{2}\, mv_0^2 + \frac{Q_0^2}{2C} = W + \frac{1}{2}\, mv_\infty^2,$$

si trova

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 + \frac{Q_0^2}{mC} - \frac{2W}{m}}.$$

Problema B

a) Si veda il libro di testo.

b) Sull'asse y la prima spira crea un campo magnetico parallelo e concorde con l'asse y di modulo

$$B_1(y) = \frac{\mu_0 I_1 R^2}{2\left((y - \sqrt{8}R)^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Analogamente sull'asse z la seconda spira crea un campo magnetico parallelo e concorde con l'asse z di modulo

$$B_2(z) = \frac{\mu_0 I_2 R^2}{2\left((z - \sqrt{3}R)^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

Nell'origine il campo totale vale quindi

$$\vec{B} = (0, B_1(0), B_2(0)) = \frac{\mu_0}{2R}\left(0, \frac{I_1}{27}, \frac{I_2}{8}\right).$$

Visto che $\tan 60^o = \sqrt{3}$ risulta

$$\sqrt{3} = \frac{B_2(0)}{B_1(0)} = \frac{27 I_2}{8 I_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{8\sqrt{3}}{27}.$$

c) Da $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B_2(z)$ segue

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=a} = -\mu \frac{\partial B_2(z)}{\partial z}\Big|_{z=a} = \frac{3\mu\mu_0 I_2 R^2 (a - \sqrt{3}R)}{2\left((a-\sqrt{3}R)^2 + R^2\right)^{5/2}} = mg,$$

da cui si ricava m. Deve valere $a > \sqrt{3}R$, sicché P si trova sopra O_2. Alla stessa conclusione si giunge ricordando che poli magnetici dello stesso tipo si respingono.