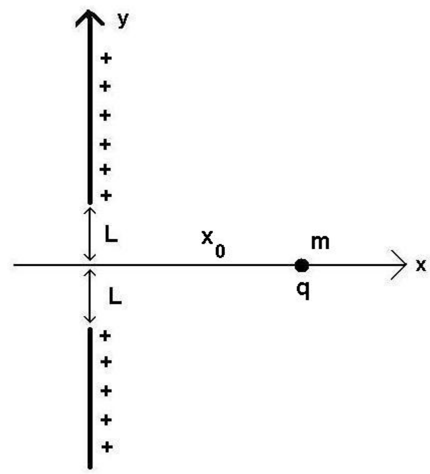
Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 16/11/2011

Problemi

Problema A



Lungo due semirette appartenenti all'asse y descritte rispettivamente dalle relazioni $y > L$ e $y < -L$ con $L > 0$, è disposta una distribuzione uniforme infinita di carica con densità lineare $\lambda > 0$.

a) Si dimostri che il potenziale sull'asse x è dato da,

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\sqrt{x^2 + L^2} + L\right),$$

e se ne tracci il grafico in modo qualitativo.

b) Si determini modulo e direzione del campo elettrico sull'asse delle x.

c) Si disegnino qualitativamente le linee del campo elettrico nel piano (xy).

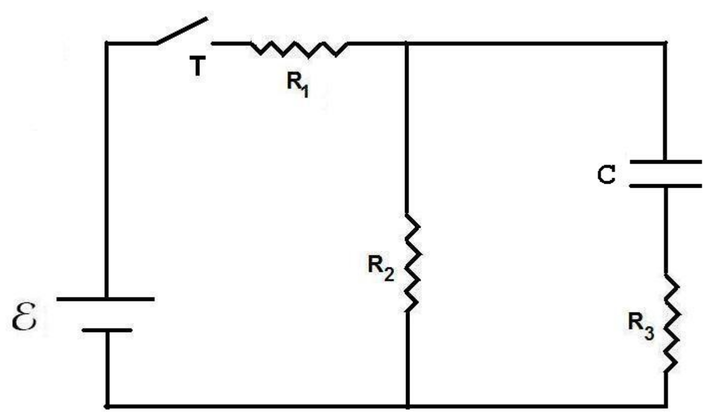
d) Si osserva che una particella di massa m e carica $q < 0$ vincolata all'asse x, posta in $x_0 = \sqrt{3}L$ con velocità nulla raggiunge la velocità massima v_M. Note q, m, e v_M si determini λ.

e) **Facoltativo:** si osserva che una particella di massa m e carica $q < 0$ vincolata all'asse x, posta in una posizione $x_0 \ll L$ con velocità nulla compie quattro piccole oscillazioni complete in un secondo. Note q, m ed L si determini λ.

Suggerimento: può risultare conveniente rispondere alle domande in un ordine diverso da quello indicato. Può essere utile la conoscenza delle primitive,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \ln\left(\sqrt{u^2+1} + u\right), \quad \int \frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}},$$ e quelle ottenute con la sostituzione $u \to 1/u$.

Problema B



Nel circuito in figura i valori dei componenti sono $\varepsilon = 18V$, $R_1 = 2 \cdot 10^4\Omega$, $R_2 = 10^4\Omega$, $R_3 = 5 \cdot 10^3\Omega$, $C = 10^{-5}F$. Si supponga che l'interruttore T sia stato chiuso e che a regime, per tempi molto grandi, il condensatore abbia raggiunto la carica Q_∞.

a) Si determini la corrente I_2 che attraversa la resistenza R_2 a regime.

b) Si determini Q_∞.

c) Si supponga che a un certo istante $t = 0$ l'interruttore T venga riaperto. Si determini l'istante t^* in cui la carica del condensatore si è ridotta a Q_∞/e^2, dove e è il numero di Eulero.

d) Si determini la corrente I che attraversa la resistenza R_3 all'istante $t^*/2$.

e) **Facoltativo:** Quanto vale l'energia U_3 dissipata sulla resistenza R_3 tra gli istanti $t = 0$ e $t = \infty$?

Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 16/11/2011

Teoria

Si risponda ad un quesito del Gruppo 1 e ad un quesito del Gruppo 2.

Gruppo 1

1a) Si scrivano le due equazioni fondamentali dell'Elettrostatica in forma integrale. Si dimostri il teorema di Gauss a partire dalla legge di Coulomb.

1b) Si derivino le rappresentazioni integrali che danno il campo elettrico $\vec{E}$ e il potenziale φ in termini della densità di carica ρ, a partire dalla legge di Coulomb. Si verifichi esplicitamente che le espressioni ottenute soddisfano la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, e si derivi l'andamento a grandi distanze di $\vec{E}$ per una distribuzione di carica a supporto compatto.

1c) Si scrivano le equazioni fondamentali dell'Elettrostatica in forma differenziale e si spieghi il loro legame con l'equazione di Poisson, ovvero, l'equazione differenziale che lega il potenziale φ alla densità di carica ρ. Si dimostri che l'equazione di Poisson sotto opportune condizioni ammette soluzione unica.

1d) Si consideri un conduttore elettrostatico con carica complessiva Q in assenza di campo elettrico esterno. Si dimostri che il rapporto tra Q e $\Delta\varphi \equiv \varphi_0 - \varphi_\infty$ è costante, dove φ_0 e φ_∞ sono rispettivamente il potenziale del conduttore e il potenziale all'infinito.

1e) Si scriva il momento magnetico $\vec{\mu}$ di una spira percorsa da corrente in termini di un integrale di linea lungo la spira. Si dimostri che il momento delle forze agente su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme è dato da $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.

Gruppo 2

2a) Si derivino le caratteristiche principali di un conduttore elettrostatico, rispondendo in particolare alle domande: dove si situano le cariche elettriche? qual è la direzione del campo elettrico sul bordo del conduttore? qual è il legame tra il campo elettrico e la densità superficiale di carica?

2b) Quali sono l'espressione e il significato fisico dell'energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi? A partire da questa espressione si derivi la forma della densità di energia del campo elettrico.

2c) Si spieghi il significato fisico della densità di corrente $\vec{j}$, derivando l'espressione che lega $\vec{j}$ a $\vec{v}$ e ρ. Si dimostri l'equazione di continuità per la carica elettrica.

2d) Si derivi la legge di Ohm $V = RI$ per un resistore usando il modello di urti successivi degli elettroni con il reticolo metallico. In che cosa consiste e come si quantifica l'effetto Joule per un resistore ohmico?

2e) Quali sono le caratteristiche sperimentali della forza magnetica agente su una particella con carica q e velocità $\vec{v}$? In particolare: se la velocità raddoppia, la forza raddoppia? durante il moto la velocità può raddioppiare? Si derivi la seconda legge elementare di Laplace dall'espressione della forza di Lorentz, e si dimostri che la forza totale esercitata da un campo magnetico uniforme su una spira percorsa da corrente è nulla.

Soluzione dei problemi del compitino del 16/11/2011

Problema A

a) Usando il metodo della compensazione la distribuzione di carica può essere vista come quella di un filo infinito uniformemente carico, con potenziale,

$$\varphi_\infty(x) = -\frac{\lambda \ln |x|}{2\pi\varepsilon_0},$$

sovrapposta a quella di un'asta lunga $2L$ con densità lineare di carica $-\lambda$. Il potenziale $\varphi_A(x)$ generato dall'asta si ottiene eseguendo l'integrale,

$$\varphi_A(x) = \int_{-L}^{L} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{-L}^{L} \frac{-\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/|x|}^{L/|x|} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+L^2}+L}{|x|}\right).$$

Quindi il potenziale cercato è,

$$\varphi(x) = \varphi_\infty(x) + \varphi_A(x) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\sqrt{x^2+L^2}+L\right).$$

b) Sull'asse x il campo elettrico è diretto lungo l'asse x, rivolto a destra per $x > 0$, e a sinistra per $x < 0$. La componente x è data da,

$$E(x) = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right).$$

d) La velocità è massima dove l'energia potenziale $U(x) = q\varphi(x)$ è minima, ovvero, dato che $q < 0$, in $x = 0$. Dalla conservazione dell'energia meccanica $\varepsilon_M = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$ si ottiene allora,

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = U\left(\sqrt{3}L\right) - U(0) = q\left(\varphi\left(\sqrt{3}L\right) - \varphi(0)\right) = -\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \lambda = -\frac{\pi\varepsilon_0 mv_M^2}{q\ln(3/2)}.$$

e) Il periodo delle piccole oscillazioni vale $T = s/4$. Visto che in $x = 0$ l'energia potenziale ha un minimo, $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile. Sfruttando le espansioni,

$$\frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{L^2}}} = 1 - \frac{x^2}{2L^2} + o(x^4), \quad E(x) = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 L^2} + o(x^3),$$

per l'equazione del moto $m\ddot{x} = qE(x)$ linearizzata attorno a $x = 0$ si ottiene,

$$\ddot{x} = \frac{qE(x)}{m} \approx \frac{q\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 mL^2} \equiv -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x \quad\Rightarrow\quad \lambda = -\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mL^2}{qT^2}.$$

Problema B

a) A regime nel condensatore non passa corrente, sicché la corrente I_2 che attraversa R_2 attraversa anche R_1. Si ottiene,

$$\mathcal{E} = (R_1+R_2)I_2 \quad\Rightarrow\quad I_2 = \mathcal{E}/(R_1+R_2) = 0.6\, mA.$$

b) Visto che in R_3 non passa corrente, la differenza di potenziale Q_∞/C ai capi del condensatore deve uguagliare $R_2 I_2$, per cui $Q_\infty = CR_2I_2 = 60\mu C$.

c) Ad interruttore aperto il circuito corrisponde a un circuito RC equivalente con resistenza $R = R_2 + R_3$. La carica evolve pertanto secondo,

$$Q(t) = Q_\infty \, e^{-t/\tau}, \quad \text{con costante di tempo} \quad \tau = RC = 0.15 s.$$

Il tempo t^* si ottiene allora da $Q_\infty / e^2 = Q_\infty \, e^{-t^*/\tau} \quad \Rightarrow \quad t^* = 2\tau = 0.3 s.$
d) Da $I(t) = -dQ(t)/dt = Q_\infty \, e^{-t/\tau}/\tau$ si ottiene $I(t^*/2) = Q_\infty/\tau e = 0.15 \, mA.$
e) All'istante $t = 0$ l'energia elettrostatica del condensatore vale $U = Q_\infty^2/2C$, e durante il processo di scarica si dissipa sulle resistenze R_2 e R_3. Sulla resistenza R_2 si dissipa l'energia $U_2 = \int_0^\infty R_2 I^2(t)\, dt$, e su R_3 l'energia $U_3 = \int_0^\infty R_3 I^2(t)\, dt$. Valgono allora le relazioni $U_2 + U_3 = U$, $U_2/U_3 = R_2/R_3$, sicché,

$$U_3 = \frac{U R_3}{R_2 + R_3} = \frac{1}{2} C \varepsilon^2 \cdot \frac{R_2^2 \, R_3}{(R_1 + R_2)^2 (R_2 + R_3)} = 6 \cdot 10^{-5} J.$$