Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 20/11/2013

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Su una corona circolare con centro l'origine giacente nel piano xy, con raggi $r_1 = \sqrt{3}\,a$ ed $r_2 = \sqrt{8}\,a$, si trova una distribuzione uniforme di carica con densità superficiale $\sigma > 0$. Si trascuri la forza peso.

a) Si determini il potenziale $\varphi(z)$ sull'asse z e se ne tracci qualitativamente il grafico.

b) Si determini il campo elettrico $\vec{E}(z)$ sull'asse z e si tracci qualitativamente il grafico della componente $E_z(z)$.

c) Due particelle identiche di massa m e carica $-q < 0$ si trovano inizialmente rispettivamente nelle posizioni $(0, 0, -a)$ e $(0, 0, a)$ con velocità nulle. Assumendo noti tutti gli altri parametri del problema si determini il valore minimo q_m della carica q, per cui le particelle iniziano a muoversi *allontanandosi* dall'origine.

d) Si calcoli la velocità v_∞ delle due particelle nel limite in cui la loro distanza tende a infinito. Affinché il moto delle particelle sia illimitato è sufficiente che valga $q > q_m$?

e) Facoltativo. Utilizzando i risultati di cui ai quesiti **a)** e **b)**, con r_1 ed r_2 generici, si determini il campo elettrico $\vec{E}_\lambda(z)$ sull'asse di un anello di raggio r uniformemente carico con densità lineare λ.

Problema B

Due biglie conduttrici di raggi $r_1 = r$ ed $r_2 = 2r$ hanno come centri rispettivamente i punti $O_1 = (-b, 0, 0)$ e $O_2 = (b, 0, 0)$, con $b \gg r$. Le biglie sono collegate tra di loro da un sottile filo conduttore disposto lungo l'asse x. Si osserva che una particella di prova di massa m e carica $q > 0$ passante per il punto $P = (D/\sqrt{2}, D/\sqrt{2}, 0)$, con $D \gg b$, possiede un'accelerazione di modulo a e con componente a_x *negativa*. Si trascuri la forza peso e si suppongano note le grandezze r, D, m, q, a.

a) Si determini la carica totale Q delle biglie, nonché le loro distribuzioni superficiali di carica σ_1 e σ_2.

b) Si determini la differenza di potenziale $\Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_\infty$ tra l'origine e l'infinito. *Suggerimento*: si ricordi la disposizione del filo.

c) Accendendo un campo magnetico giacente nel piano xy si osserva che l'accelerazione della particella di prova passante per il punto P è nulla. Si determini il valore *numerico* del rapporto v_x/v_y tra le componenti x e y della sua velocità.

d) Facoltativo. Si collega la biglia con centro in O_1 a terra. Si determini il lavoro L compiuto dal campo elettrico durante questo processo, specificando se $L > 0$ o $L < 0$.

Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 20/11/2013

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si definisca il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ di un sistema di cariche puntiformi e si derivi l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ a grandi distanze dal sistema in termini di $\vec{p}$ e della carica totale Q.

1b) Si consideri un conduttore con carica totale Q in assenza di campo elettrico esterno. Si dimostri che il rapporto $Q/(\varphi_0 - \varphi_\infty)$ è costante, dove φ_0 e φ_∞ sono rispettivamente il potenziale del conduttore e il potenziale all'infinito, e se ne deduca che, nota Q, la distribuzione superficiale di carica del conduttore è univocamente determinata.

1c) Si derivi l'espressione della *densità di energia* del campo elettrico a partire dall'espressione dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi. Si spieghi il legame esistente tra il lavoro compiuto dal campo elettrico e l'energia elettrostatica di un sistema.

1d) Si derivi l'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ a partire dalla *legge di Coulomb*.

Gruppo 2

2a) Si definisca il momento magnetico $\vec{\mu}$ associato a una densità di corrente $\vec{j}$ e si determini la sua espressione per una spira percorsa da corrente. Quanto valgono in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$ il momento delle forze $\vec{M}$ agente sulla spira e la sua energia potenziale meccanica U_m, quando $\vec{\mu}$ assume rispettivamente le direzioni di equilibrio *i)* stabile e *ii)* instabile?

2b) Si dimostri che l'orbita $\vec{x}(t)$ di una particella carica in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ha la forma di un'*elica*. Si dimostri che il *passo* dell'elica, definito come $P(t) \equiv z(t+T) - z(t)$, è indipendente da t, dove $T = 2\pi/\omega$ e ω è la *frequenza di ciclotrone*.

2c) Come si definisce e qual è il significato fisico della densità di corrente $\vec{j}(\vec{x})$? Si derivi l'*equazione di continuità* per la carica elettrica. Cosa distingue il concetto di conservazione *locale* da quello di conservazione *globale*?

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Una corona circolare di raggio r e spessore infinitesimo dr produce nel punto $(0,0,z)$ il potenziale infinitesimo $d\varphi(z) = \sigma(2\pi r dr)/4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}$. Integrando in r si trova

$$\varphi(z) = \int_{r_1}^{r_2} d\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+r_2^2} - \sqrt{z^2+r_1^2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+8a^2} - \sqrt{z^2+3a^2}\right). \quad (1)$$

b) Per motivi di simmetria risulta $\vec{E}(z) = (0,0,E_z(z))$ con

$$E_z(z) = -\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+3a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+8a^2}}\right).$$

c) La componente F_z della forza agente inizialmente sulla particella che si trova nel punto $(0,0,a)$ deve essere positiva (mentre quella agente sull'altra particella deve essere negativa)

$$F_z = (-q)E_z(a) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2} = -\frac{q\sigma}{12\varepsilon_0} + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} > 0.$$

Si ottiene

$$q > \frac{4\pi}{3}\,\sigma a^2 \equiv q_m. \quad (2)$$

d) Dalla conservazione dell'energia meccanica totale risulta

$$\varepsilon_M = (-2q)\varphi(a) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)} = -\frac{qa\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = 2\cdot\frac{1}{2}\,mv_\infty^2,$$

da cui

$$v_\infty = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 am} - \frac{qa\sigma}{\varepsilon_0 m}} = \sqrt{\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 am}\,(q - 8\pi\sigma a^2)}.$$

Le particelle compiono un moto illimitato se il radicando è positivo, ovvero se $q > 8\pi\sigma a^2$, condizione più restrittiva della (2).

e) Per determinare il potenziale $\varphi_\lambda(z)$ dell'anello occorre eseguire il limite del potenziale $\varphi(z)$ in (1) per $r_2 \to r_1 \equiv r$, mantenendo costante la grandezza $\lambda \equiv (r_2 - r)\sigma$,

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(z) &= \lim_{r_2\to r}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+r_2^2} - \sqrt{z^2+r^2}\right)\right) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\lim_{r_2\to r}\frac{\sqrt{z^2+r_2^2}-\sqrt{z^2+r^2}}{r_2 - r}\\ &= \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0\sqrt{z^2+r^2}}.\end{aligned}$$

Quindi

$$E_\lambda(z) = -\frac{\partial\varphi_\lambda(z)}{\partial z} = \frac{\lambda r z}{2\varepsilon_0(z^2+r^2)^{3/2}}.$$

Problema B

a) Visto che $D \gg b \gg r$ il punto P si trova a grandi distanze dalle cariche che creano il campo elettrico. Il campo elettrico in P può quindi essere approssimato con $\vec{E} = Q\vec{u}_r/4\pi\varepsilon_0 D^2$. Essendo $a_x < 0$, l'accelerazione (radiale) è rivolta verso l'origine e di conseguenza

$$m(-a) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 D^2} \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{ma4\pi\varepsilon_0 D^2}{q} < 0.$$

I potenziali delle biglie devono essere uguali e, visto che le distribuzioni σ_1 e σ_2 si possono assumere uniformi, deve quindi valere

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}, \qquad Q_1 + Q_2 = Q \qquad \Rightarrow \qquad Q_1 = \frac{Q}{3}, \quad Q_2 = \frac{2Q}{3}.$$

Per le densità di carica si ottiene allora

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2} = -\frac{ma\varepsilon_0 D^2}{3qr^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi(2r)^2} = -\frac{ma\varepsilon_0 D^2}{6qr^2}.$$

b) Con le convenzioni scelte il potenziale all'infinito è zero. Tenendo conto che l'origine si trova all'interno del conduttore si trova allora

$$\Delta\varphi = \varphi_O = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{maD^2}{3qr}.$$

c) Deve valere $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Visto che $B_z = E_z = 0$ si ottengono le equazioni

$$E_x - v_z B_y = 0, \quad E_y + v_z B_x = 0, \quad v_x B_y - v_y B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_x}{v_y} = \frac{B_x}{B_y} = -\frac{E_y}{E_x} = -1,$$

poiché $\vec{E} = Q(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)/4\pi\varepsilon_0 D^2$.

d) Mettendo a terra il conduttore esso si scarica completamente e vale quindi $L = -\Delta U_e = -(U_f - U_i) = U_i$. Per un conduttore la formula $U_i = \frac{1}{2}\int \varphi\, \rho\, d^3x$ fornisce il valore positivo

$$L = U_i = \frac{Q\varphi_O}{2} = \frac{Q^2}{24\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2m^2a^2\pi\varepsilon_0 D^4}{3q^2 r}.$$