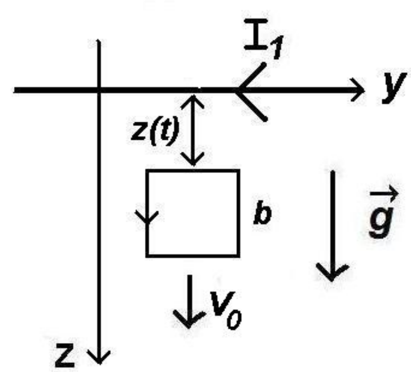
Secondo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 22/01/2013

Problemi

Problema A



Un filo conduttore infinito disposto lungo l'asse orizzontale delle y è percorso da una corrente costante $I_1 > 0$ fluente nel verso delle y decrescenti. Una spira conduttrice quadrata di lato b, massa m, resistenza R e induttanza trascurabile è confinata al piano verticale yz mantenendo i lati paralleli agli assi ed essendo soggetta alla forza peso. L'asse z ha verso discendente. Si indichino la distanza del lato superiore della spira dall'asse y a un generico istante t con $z \equiv z(t)$ e la sua velocità in direzione z con $v = dz/dt \equiv v(t)$. All'istante $t = 0$ si ha $z(0) = b$ e $v(0) = v_0 > 0$. Si considerino note le quantità I_1, m, b, R e v_0.

a) Si determini il flusso Φ del campo magnetico attraverso la spira – orientata in senso antiorario – come funzione di z.

b) Si determini la corrente $I(0)$ che circola nella spira all'istante $t = 0$. Tale corrente circola in senso orario o antiorario?

c) Si determini la forza magnetica totale $\vec{F}$ agente sulla spira in termini di z e v.

d) Facoltativo: Si scriva l'equazione del moto della spira come equazione differenziale per la funzione incognita $z \equiv z(t)$.

e) Facoltativo: Si esprima la derivata temporale dell'energia meccanica della spira $d\varepsilon_M/dt$ in termini della corrente $I(t)$ che vi fluisce.

Problema B

Una spira conduttrice giacente nel piano xy ha la forma di un'ellisse con semiassi a e b. Il centro della spira si trova nell'origine del sistema cartesiano, il suo asse maggiore forma un angolo di 23^o con l'asse x e la spira è percorsa da una corrente costante $I > 0$ in senso antiorario. Nel punto $P_1 = (\frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}, 0)$ con $L > 0$, $L \gg a$ e $L \gg b$ si trova un piccolo ago magnetico di momento magnetico che in modulo vale μ^*. Si suppongano note le quantità a, b, L, I e μ^* e si trascuri la forza peso. Si ricordi la formula del *campo di dipolo magnetico*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right), \quad r = |\vec{x}|.$$

a) Si deteriminino il momento magnetico $\vec{\mu}$ della spira e le direzioni di equilibrio stabile e instabile dell'ago.

b) Si determini il momento delle forze $\vec{M}$ esercitato dalla spira sull'ago se l'ago è diretto lungo la direzione individuata dal versore $\vec{n}_1 = (0, 1, 1)/\sqrt{2}$.

c) Supponendo che l'ago si trovi nella posizione $P_2 = (0, 0, L)$ e sia diretto lungo il versore $\vec{n}_2 = (0, 0, -1)$ si determini la componente z della forza, F_z, che la spira esercita sull'ago. Tale forza è attrattiva o repulsiva?

d) Facoltativo: Si supponga che a un certo istante nel punto P_2 si trovi una particella di massa m e carica $q < 0$ note, con velocità diretta lungo l'asse delle y crescenti. Trascurando la forza peso e conoscendo il modulo dell'accelerazione $|\vec{a}|$ della particella se ne determinino la velocità $\vec{v}$ e l'accelerazione $\vec{a}$ in quell'istante.

Secono compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 22/01/2013

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Gruppo 1

1a) Si derivi la *legge di Ampere* in forma integrale a partire dalla nota espressione del campo magnetico di un filo rettilineo infinito, specificando le ipotesi di volta in volta utilizzate. Si derivi la legge di Ampere in forma differenziale da quella in forma integrale, specificando il ruolo del vincolo $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

1b) Si derivi l'*equazione di continuità* per l'energia, ovvero $\partial w_{em}/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$, a partire dalle equazioni di Maxwell. Quale equazione si usa per dimostrare la relazione $\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3x = \frac{d}{dt} \sum_{j \in V} \varepsilon_j$? A partire da tali equazioni si dimostri che in Elettrodinamica l'energia totale si conserva.

1c) A partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si dimostri che il campo $\vec{E}$ soddisfa l'equazione delle onde tridimensionale. Che conclusione se ne può trarre? Si derivino le principali proprietà dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associati a una generica onda elettromagnetica monocromatica.

1d) Si enuncino i *postulati della Relatività*. Assumendo che le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali da un sistema di riferimento inerziale a un altro siano lineari si dimostri il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, specificando i postulati che di volta in volta si usano.

1e) Si scrivano le *equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica* in forma covariante a vista. Si verifichi che l'equazione di Maxwell contenente la *corrente di spostamento* segue da tali equazioni.

Gruppo 2

2a) Quali sono i due tipi di esperimenti in cui si osserva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica e quali sono i meccanismi fisici che causano la f.e.m. indotta nei due casi? Si enunci la *regola del flusso* e la si derivi a partire dalla forza di Lorentz in un caso semplice. In che senso la *legge di Faraday* segue dalla regola del flusso?

2b) Per quale motivo l'*equazione di Ampere* nel caso di campi variabili nel tempo deve essere modificata? Quale nuovo fenomeno fisico viene introdotto dall'*equazione di Ampere-Maxwell*? Si illustri la consistenza della presenza della *corrente di spostamento* durante il processo di carica di un condensatore.

2c) Si spieghi il funzionamento del *betatrone* e si derivi il vincolo a cui deve soddisfare il campo magnetico $B(t, r)$.

2d) Come si definisce l'induttanza L di un circuito? Si derivi la formula per l'energia magnetica U_L immagazzinata in un circuito con induttanza L percorso da corrente I. Applicando tale formula a un solenoide ideale si derivi l'espressione della densità di energia w_m associata al campo magnetico.

2e) Utilizzando le trasformazioni di Lorentz speciali si derivi il fenomeno della dilatazione dei tempi e si dimostri che particelle con velocità superiori alla velocità della luce violano la causalità.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Nel semipiano yz, $z > 0$ il campo magnetico generato dal filo è ortogonale al piano e di verso uscente, valendo in modulo

$$B(z) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi z}.$$

Visto l'orientamento della spira il flusso di $\vec{B}$ attraverso la stessa è positivo e vale

$$\Phi = b \int_z^{z+b} B(z')\, dz' = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{z+b}{z}.$$

b) Dato che $v = dz/dt$ si ottiene

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \left(\frac{1}{z+b} - \frac{1}{z} \right) v = \frac{\mu_0 I_1 b^2 v}{2\pi z(z+b)} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I_1 b^2 v}{2\pi z(z+b)R}. \tag{1}$$

Visto che $\varepsilon > 0$ la corrente circola in senso *antiorario* in accordo con la legge di Lenz: dato che la spira cade il flusso di $\vec{B}$ diminuisce e la corrente indotta genera un campo uscente per compensare (parzialmente) tale diminuzione. All'istante $t = 0$ si ha

$$I(0) = \frac{\mu_0 I_1 v_0}{4\pi R}.$$

c) Le forze magnetiche agenti sui due tratti verticali della spira sono uguali ed opposte. La forza complessiva possiede allora solo una componente z che è data da, si veda la (1),

$$F_z = -bIB(z) + bIB(z+b) = -\frac{\mu_0 I I_1 b^2}{2\pi z(z+b)} = -\left(\frac{\mu_0 I_1 b^2}{2\pi z(z+b)} \right)^2 \frac{v}{R}$$

ed è dunque rivolta verso l'alto. Si noti che si può anche scrivere $F_z = -RI^2/v$.

d) La componente z dell'equazione di Newton per il centro di massa della spira si scrive

$$m\ddot{z} = mg + F_z = mg - \left(\frac{\mu_0 I_1 b^2}{2\pi z(z+b)} \right)^2 \frac{\dot{z}}{R}.$$

e) Per la conservazione dell'energia totale la derivata dell'energia meccancia della spira $\varepsilon_M = \frac{1}{2} m v^2 - mgz$ deve eguagliare la potenza dissipata per effetto Joule,

$$\frac{d\varepsilon_M}{dt} = -RI^2,$$

equazione che si verifica facilmente usando le relazioni ricavate sopra.

Problema B

a) Il momento magnetico della spira è dato da $\vec{\mu} = \mu\, \vec{u}_z$, $\mu = (\pi a b) I$. Dato che rispetto alle dimensioni della spira il punto P_1 è molto distante dalla stessa è lecito usare per il campo magnetico $\vec{B}_1$ in P_1 l'espressione del campo di dipolo. Visto che in P_1 si ha $\vec{x} = (\frac{L}{\sqrt{2}}, \frac{L}{\sqrt{2}}, 0)$ vale $\vec{\mu} \cdot \vec{x} = 0$ e si ottiene

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi L^3} (-\vec{\mu}) = -\frac{\mu_0 \mu}{4\pi L^3} \vec{u}_z.$$

La direzione di equilibrio stabile dell'ago è quindi quella delle z decrescenti, mentre quella di equilibrio instabile è quella delle z crescenti.

b) Vista la direzione dell'ago il suo momento magnetico vale $\vec{\mu}_1^* = \mu^* \vec{n}_1 = \mu^*(\vec{u}_y + \vec{u}_z)/\sqrt{2}$ e quindi

$$\vec{M} = \vec{\mu}_1^* \times \vec{B}_1 = -\frac{\mu^*}{\sqrt{2}} (\vec{u}_y + \vec{u}_z) \times \frac{\mu_0 \mu}{4\pi L^3} \vec{u}_z = -\frac{\mu_0 \mu \mu^*}{4\pi \sqrt{2} L^3} \vec{u}_x.$$

c) In P_2 l'ago ha momento magnetico $\vec{\mu}_2^* = \mu^* \vec{n}_2 = -\mu^* \vec{u}_z$ e la sua energia potenziale è quindi $U = -\vec{\mu}_2^* \cdot \vec{B} = \mu^* B_z$. Per la componente z della forza si ottiene allora $F_z = -\partial U/\partial z = -\mu^* \partial B_z/\partial z$. In P_2 vale $x = y = 0$ e per il calcolo di F_z è dunque sufficiente calcolare B_z sull'asse z ($z > 0$):

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi z^3} \left(\frac{3(\mu z) z}{z^2} - \mu \right) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}. \tag{2}$$

Di conseguenza

$$F_z = -\, \mu^* \frac{\partial B_z}{\partial z} \bigg|_{z=L} = \frac{3\mu_0 \mu \mu^*}{2\pi L^4}.$$

Essendo $F_z > 0$ la forza è repulsiva.

d) Nel punto P_2 il campo magnetico possiede solo componente z, data dalla (2) con $z = L$, sicché l'equazione di Lorentz si scrive

$$m\vec{a} = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q(v_y \vec{u}_y) \times (B_z \vec{u}_z) = q v_y B_z \vec{u}_x,$$

con $B_z = \mu_0 \mu / 2\pi L^3$. Visto che $q < 0$, $v_y > 0$ e $B_z > 0$ si ottiene $\vec{v} = -(m|\vec{a}|/qB_z)\vec{u}_y$ e $\vec{a} = -|\vec{a}|\vec{u}_x$.