Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 22/11/2012

Problemi

Problema A

Una distribuzione uniforme di carica di densità di volume $\rho > 0$ occupa un cilindro di lunghezza infinita e raggio R, avente come asse l'asse z. Si trascuri la forza peso e si definisca la coordinata radiale cilindrica $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Si determini il modulo $E(r)$ del campo elettrico nelle regioni $r > R$ e $r < R$, tracciando il grafico della funzione $E(r)$.

b) Si determini il potenziale elettrico $\varphi(r)$ nelle regioni $r > R$ e $r < R$ imponendo la condizione $\varphi(0) = 0$ e se ne tracci il grafico come funzione di r.

c) Si consideri una particella di carica $q < 0$ e massa m che si trova inizialmente nel punto di coordinate $(3R, 4R, 2R)$ con velocità $\vec{v}_0 = (\sqrt{2}w, w, -w)$ con $w > 0$. Si osserva che a un certo istante la particella impatta sulla superficie del cilindro. Supponendo noti q, m, ρ, R, e w si determini il modulo v della velocità della particella all'istante dell'impatto.

d) Si determini la componente v_z della velocità all'istante dell'impatto.

e) Facoltativo: si supponga che la particella di cui al quesito **c)** a un certo istante si trovi all'interno del cilindro con velocità iniziale nulla. Si dimostri che la particella compie un moto armonico semplice e se ne determini il periodo T.

Problema B

Una particella di carica $q > 0$ e massa m si trova in presenza dei campi elettrico e magnetico costanti e uniformi $\vec{E} = (0, 0, E)$ e $\vec{B} = (0, 0, B)$, con $E > 0$ e $B > 0$. All'istante $t = 0$ la velocità della particella forma un angolo di 60^o con $\vec{E}$ e vale in modulo v_0. Si osserva che a un istante $t^* > 0$ il modulo della velocità vale $v = \sqrt{7/4}\, v_0$. Si suppongano note le quantità q, m, v_0 e t^* e si trascuri la forza peso.

a) Si determini la componente z della velocità della particella all'istante t^*, $v_z(t^*)$, in termini della sola variabile v_0.

b) Si determini E.

c) Supponendo noto il raggio R della proiezione dell'orbita nel piano (xy) si determini B.

d) Facoltativo: si determini il modulo a dell'accelerazione della particella a un istante t generico. Il risultato dipende da t?

Primo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 22/11/2012

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Gruppo 1

1a) Si determini l'espressione dell'energia elettrostatica U_E di un sistema di cariche puntiformi a partire dalla legge di Coulomb e si spieghi il suo legame con il lavoro compiuto dal campo elettrico. Qual è l'espressione dell'energia meccanica conservata di un sistema di cariche puntiformi che si trovano in presenza di un campo elettrostatico esterno?

1b) Si scrivano le equazioni fondamentali dell'Elettrostatica e si spieghi in che modo discendono dalla legge di Coulomb. Si dimostri che sotto opportune condizioni queste equazioni ammettono soluzione unica per $\vec{E}$. Qual è la forma esplicita di questa soluzione?

1c) Quali sono le proprietà della forza magnetica agente su una particella con carica q e velocità $\vec{v}$? Sfruttando queste proprietà si dimostri che l'azione magnetica è riconducibile a un campo vettoriale, ovvero il campo magnetico $\vec{B}$, e si derivi l'espressione della forza di Lorentz.

Gruppo 2

2a) Cosa affermano le leggi di Kirchhoff e da quali proprietà del campo elettrico e della carica discendono? Si derivino *i*) l'espressione della potenza fornita da un generatore di differenza di potenziale e *ii*) quella della potenza dissipata per effetto Joule in una resistenza.

2b) Si dimostri che il momento delle forze agente su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme è dato da $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.

2c) Si dia la definizione della densità di corrente $\vec{j}$ e si derivi l'espressione che lega $\vec{j}$ a $\vec{v}$ e ρ. Si scriva e si dimostri l'equazione di continuità per la carica elettrica.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Dalla simmetria cilindrica del problema segue che il campo è radiale e giace nel piano (xy). Applicando il teorema di Gauss a una superficie chiusa cilindrica di raggio r e altezza L si ottiene

$$(2\pi r)LE(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Per $r > R$ la carica contenuta all'interno della superficie vale $Q = (\pi R^2 L)\rho$, mentre per $r < R$ vale $Q = (\pi r^2 L)\rho$. Si ottiene pertanto

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}, & \text{per} \quad r > R, \\ \\ \dfrac{r\rho}{2\varepsilon_0}, & \text{per} \quad r < R. \end{cases} \tag{1}$$

b) Per motivi di simmetria il potenziale è funzione della sola coordinata r ed è determinato in modo univoco dalle condizioni $E(r) = -\partial\varphi(r)/\partial r$ e $\varphi(0) = 0$, nonché dalla richiesta di continuità di $\varphi(r)$ in $r = R$. Si ottiene

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{R^2\rho}{4\varepsilon_0}\left(2\ln\dfrac{r}{R} + 1\right), & \text{per} \quad r > R, \\ \\ -\dfrac{r^2\rho}{4\varepsilon_0}, & \text{per} \quad r < R. \end{cases}$$

c) All'istante iniziale la coordinata radiale vale $r_0 = \sqrt{(3R)^2 + (4R)^2} = 5R$ e all'istante dell'impatto con il cilindro vale $r = R$. Il modulo della velocità iniziale vale $v_0 = \sqrt{(\sqrt{2}w)^2 + w^2 + (-w)^2} = 2w$. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava allora

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + q\varphi(5R) = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(R) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{4w^2 - \frac{qR^2\rho\ln 5}{m\varepsilon_0}},$$

dove si è usata l'espressione di $\varphi(r)$ per $r > R$.

d) Essendo la componente z del campo elettrico nulla, la componente z della velocità della particella resta costante. Vale pertanto $v_z = -w$.

e) Per $r < R$ il campo elettrico è dato dalla seconda formula in (1) ed è dunque proporzionale al raggio, avendo direzione radiale con verso uscente. La forza $q\vec{E}$ agente su una particella di carica $q < 0$ corrisponde quindi a un oscillatore armonico bidimensionale. Proiettando l'equazione di Newton $m\vec{a} = q\vec{E}$ sulla direzione congiungente la posizione iniziale della particella con l'asse z si ottiene

$$\ddot{r} = \frac{qE}{m} = \frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}r \equiv -\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{-\frac{2m\varepsilon_0}{q\rho}}.$$

Problema B

a) In presenza di campi elettrici e magnetici uniformi e costanti paralleli tra loro, la traiettoria è un'elica di passo crescente e la proiezione dell'orbita nel piano ortogonale ai campi è un moto circolare uniforme. Il modulo della componente della velocità ortogonale ai campi, $v_\perp$, è dunque costante. All'istante $t = 0$ le componenti ortogonale e parallela ai campi sono rispettivamente

$$v_\perp(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0, \qquad v_z(0) = \frac{1}{2}\, v_0.$$

All'istante t^* abbiamo pertanto

$$v^2 = \frac{7}{4}\, v_0^2 = v_\perp^2(0) + v_z^2(t^*) \quad \Rightarrow \quad v_z(t^*) = v_0.$$

b) Essendo il moto lungo l'asse z uniformemente accelerato, con accelerazione $a_z = qE/m$, vale

$$v_z(t^*) = v_z(0) + \frac{qE}{m}\, t^* \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mv_0}{2qt^*}.$$

c) La velocità angolare dell'orbita proiettata nel piano (xy) è data dalla frequenza di ciclotrone $\omega = qB/m$ e inoltre $v_\perp(0) = R\omega$. Ne segue che

$$B = \frac{\sqrt{3}mv_0}{2Rq}.$$

d) Visto che a ogni istante $|\vec{v} \times \vec{B}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0 B$ ed $\vec{E} \perp \vec{v} \times \vec{B}$, dall'equazione di Lorentz

$$m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

segue che a è indipendente da t, essendo data da

$$a = \frac{q}{m}\sqrt{\left(E^2 + \frac{3}{4}\, v_0^2 B^2\right)} = \sqrt{\frac{v_0^2}{4t^{*2}} + \frac{9v_0^4}{16R^2}}.$$