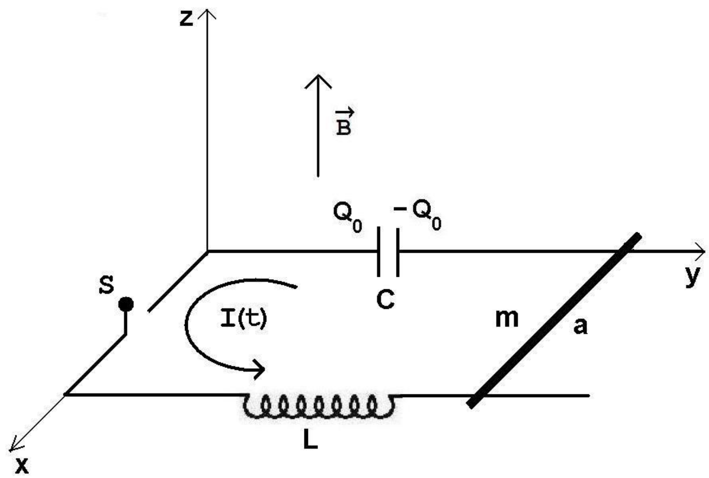
Secondo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 26/01/2012

Problemi

Problema A

Una sbarra conduttrice di lunghezza a è vincolata a muoversi senza attrito lungo due guide metalliche parallele all'asse y, collegate tra di loro. La sbarra si mantiene sempre parallela all'asse x. Nelle guide sono inseriti un'induttanza L e un condensatore di capacità C, vedi figura. Tutti gli elementi resistivi del circuito sono trascurabili. Il sistema si trova in presenza di un campo magnetico $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$ costante e uniforme diretto lungo l'asse z positivo. Inizialmente sull'armatura sinistra del condensatore si trova la carica $Q_0 > 0$, la sbarra è a riposo, e l'interruttore S è aperto. Sono note le grandezze a, B, L, C, Q_0, e la massa della sbarra vale $m = a^2B^2C/3$. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Si indichi con $I(t)$ la corrente circolante in senso antiorario, come indicato in figura.



a) Si dica se immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore $I(t)$ è positiva o negativa, e se la sbarra incomincia a muoversi nel verso delle y crescenti o decrescenti.

b) Si determini la derivata della corrente $\frac{dI}{dt}(0)$ all'istante iniziale.

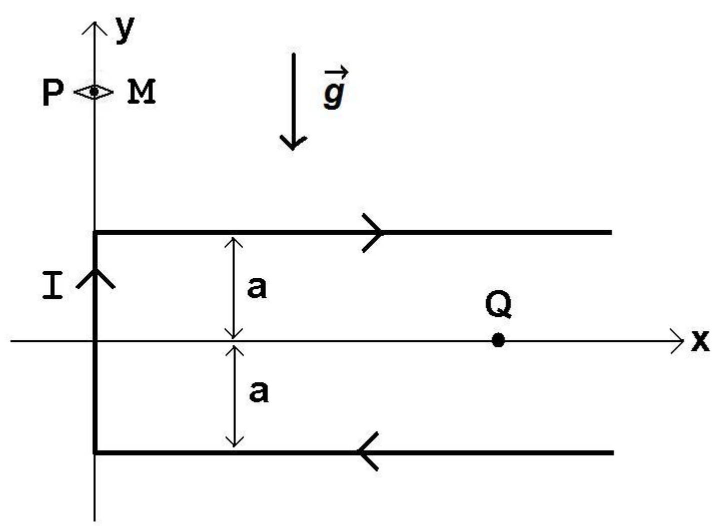
c) Si dimostri che $I(t)$ è una funzione periodica, e se ne determini il periodo T come funzione solamente di L e C.

d) Si determini la corrente massima I_M.

e) **Facoltativo:** Sapendo che a un certo istante la carica del condensatore vale $Q_* = 3Q_0/4$ e la velocità della sbarra v_*, si determini il modulo della corrente I_* allo stesso istante. [Suggerimento: si esegua il bilancio energetico.]

Problema B

Un filo conduttore infinito a forma di "U" è percorso dalla corrente $I = 10A$ con il verso indicato in figura. La semidistanza tra i due rami infiniti vale $a = 0.2cm$, e l'asse y è verticale ascendente. Un piccolo ago magnetico di massa M e momento magnetico $\mu = 0.2Am^2$ è vincolato a muoversi senza attrito sull'asse y. Si ricordi che $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$.



a) Si determini modulo e direzione del campo magnetico $\vec{B}(P)$ in un generico punto $P = (0, y, 0)$ dell'asse y, con $|y| > a$.

b) Quale momento esterno $\vec{M}_{ext}$ occorre applicare all'ago quando si trova nella posizione $y = 2a$, se lo si vuole mantenere diretto lungo l'asse x positivo?

c) Si osserva che quando l'ago è parallelo al campo magnetico, $y = -2a$ è una posizione di equilibrio. Si determini la sua massa M.

d) Si determini il campo magnetico $\vec{B}(Q)$ in un punto $Q = (x, 0, 0)$ per cui $x > 0$ e $x \gg a$.

Secondo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 26/01/2012

Teoria

Si risponda ad un quesito del Gruppo 1 e ad un quesito del Gruppo 2.

Gruppo 1

1a) Si scriva la *legge di Ampere* in forma differenziale ed integale, e se ne determini la soluzione derivando per $\vec{B}$ e per il potenziale vettore $\vec{A}$ rappresentazioni integrali in termini di $\vec{j}$. Da queste rappresentazioni si derivi la *prima legge elementare di Laplace* per $d\vec{B}$.

1b) Si spieghi il funzionamento del *Betatrone* e si derivi il vincolo a cui deve soddisfare il campo magnetico.

1c) Si derivi l'*equazione di continuità dell'energia*, ovvero, $\partial w_{em}/\partial t+\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$, a partire dalle equazioni di Maxwell. Cosa si usa per dimostrare la relazione $\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3x = \frac{d}{dt}\sum_{j\in V}\varepsilon_j$? Si discuta la conservazione locale dell'energia in Elettrodinamica a partire da tali equazioni.

1d) A partire dalle equazioni di Maxwell nel vuoto si dimostri che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soddisfano l'equazione delle onde tridimensionale. Che conclusione se ne trae? Si derivino le principali proprietà dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associati a una generica onda elettromagnetica monocromatica.

1e) Si enuncino i *postulati della Relatività*. Si deduca la forma di una generica trasformazione (di Poincaré) da un sistema di riferimento inerziale ad un altro, dimostrando in particolare il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, specificando i postulati che di volta in volta si usano.

1f) Si scrivano le *equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica* in forma covariante a vista. Si verifichi che l'equazione di Lorentz in forma covariante a vista è equivalente all'equazione di Lorentz tridimensionale, opportunamente modificata. Qual è il significato della quarta componente dell'equazione di Lorentz in forma covariante a vista?

Gruppo 2

2a) In che cosa consiste l'*effetto fotoelettrico*? Quali caratteristiche del fenomeno erano incompatibili con l'Elettrodinamica classica e in che modo le relative difficoltà vengono risolte dall'ipotesi dei fotoni? Quali sono le proprietà dei fotoni che compongono un'onda elettromagnetica monocromatica?

2b) Quali sono i due tipi di esperimenti in cui si osserva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica e quali sono i meccanismi fisici che causano la f.e.m. indotta nei due casi? Si enunci la *regola del flusso* e la si derivi a partire dalla forza di Lorentz in qualche caso semplice. La *legge di Faraday* è una conseguenza della regola del flusso?

2c) Per quale motivo l'equazione di Ampere per campi variabili nel tempo deve essere modificata? Quale nuovo fenomeno fisico viene introdotto dall'*equazione di Ampere–Maxwell*? Si illustri la consistenza della presenza della *corrente di spostamento* durante il processo di carica di un condensatore.

2d) Quali sono le osservazioni sperimentali che hanno portato Maxwell a identificare la luce come un fenomeno elettromagnetico e cosa hanno invece dimostrato gli esperimenti di Hertz? Si spieghi qualitativamente come avvengono i processi di emissione e di assorbimento della radiazione da parte di particelle cariche.

2e) Utilizzando le trasformazioni di Lorentz speciali si derivi il fenomeno della dilatazione dei tempi e si dimostri che particelle che posseggono velocità maggiori della velocità della luce violano la causalità.

Soluzione dei problemi del compitino del 26/01/2012

Problema A

a) Dopo la chiusura del circuito il condensatore comincia a scaricarsi, e visto che $Q_0 > 0$ si innesca una corrente *antioraria*. Immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore si ha quindi $I(t) > 0$. Lungo la sbarra la corrente fluisce allora nel verso delle x decrescenti. Per la seconda legge elementare di Laplace sulla sbarra agisce pertanto la forza,

$$\vec{F} = -I(t)\, a\, \vec{u}_x \times B\, \vec{u}_z = aBI(t)\, \vec{u}_y. \tag{1}$$

La sbarra comincia quindi a muoversi lungo le y *crescenti*.

b) Indicando la posizione della sbarra con $y \equiv y(t)$ e la sua velocità con $v = dy/dt$, il flusso di $\vec{B}$ attraverso il circuito, orientato in senso antiorario, è $\Phi = ayB$, sicché la f.e.m. indotta è $\varepsilon = -d\Phi/dt = -avB$, che si oppone dunque a I. L'equazione del circuito a un istante generico è quindi,

$$-avB = L\,\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}, \quad \text{con} \quad I = -\frac{dQ}{dt}, \quad \text{in quanto si tratta di una corrente di scarica.} \tag{2}$$

Dato che la sbarra inizialmente è a riposo, $v(0) = 0$, valutando la (2) a $t = 0$ si ottiene,

$$\frac{dI}{dt}(0) = \frac{Q_0}{LC}. \tag{3}$$

c) Poiché sulla sbarra agisce la forza (1) l'equazione di Newton per quest'ultima si scrive,

$$m\,\frac{dv}{dt} = aBI.$$

Inserendo questa equazione nella derivata della (2) si ottiene,

$$-\frac{a^2B^2}{m}\, I = L\,\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C},$$

che per $m = a^2B^2C/3$ si riduce a,

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega^2 I = 0, \quad \omega = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{LC}. \tag{4}$$

d) La soluzione generale della (4) è $I(t) = I_M\, sen(\omega t + \varphi)$. Dai dati iniziali (3) e $I(0) = 0$ si ricava,

$$\varphi = 0, \quad I_M = \frac{Q_0}{\omega LC} = \frac{Q_0}{2\sqrt{LC}}, \quad \text{e quindi} \quad I(t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{LC}}\, sen(\omega t). \tag{5}$$

e) Con $Q_* = 3Q_0/4$ dalla conservazione dell'energia si ottiene,

$$\frac{1}{2}\, LI_*^2 + \frac{Q_*^2}{2C} + \frac{1}{2}\, mv_*^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad I_* = \sqrt{\frac{7Q_0^2}{16LC} - \frac{mv_*^2}{L}}. \tag{6}$$

NOTA: in realtà il dato v_* del punto e) è ridondante. Infatti, dalle (2) e dalla (5) seguono le leggi orarie,

$$Q(t) = \frac{Q_0}{4}\,(cos(\omega t) + 3), \quad v(t) = \frac{aBQ_0}{4m}\,(1 - cos(\omega t)).$$

Di conseguenza la carica $Q_* = 3Q_0/4$ viene assunta a un istante t_* per cui $cos(\omega t_*) = 0$, sicché $v_* = aBQ_0/4m$. La (6) dà allora $I_* = Q_0/2\sqrt{LC}$, risultato che segue anche direttamente dalla (5) poiché $sen(\omega t_*) = \pm 1$ e per definizione $I_* = |I(t_*)|$.

Problema B

a) In base alla prima legge elementare di Laplace il tratto verticale del filo lungo l'asse y non produce nessun campo magnetico, poiché $d\vec{s} \parallel \vec{u}_y$. Le due semirette producono ciascuna un campo magnetico che sull'asse y è uguale a metà di quello prodotto da un filo rettilineo infinito. Il campo totale è quindi diretto lungo l'asse z, $\vec{B}(P) = B(y)\,\vec{u}_z$, dove,

$$B(y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi(y-a)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(y+a)} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi(y^2-a^2)}.$$

b) Quando l'ago punta nella direzione dell'asse x positivo il suo momento magnetico è $\vec{\mu} = \mu\vec{u}_x$. D'altra parte in $y = 2a$ il campo magnetico vale $\vec{B} = (\mu_0 I/6\pi a)\,\vec{u}_z$. Il momento esterno, dovendo compensare quello esercitato dal campo magnetico, è quindi dato da,

$$\vec{M}_{ext} = -\vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{6\pi a}\,\vec{u}_y = 6.7 \cdot 10^{-5} Nm\,\vec{u}_y.$$

c) Visto che sull'asse y il campo magnetico è diretto lungo l'asse z positivo, in questo caso abbiamo $\vec{\mu} = \mu\vec{u}_z$, sicché l'energia potenziale magnetica diventa $U(y) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(P) = -\mu B(y)$. La forza magnetica agente in direzione y sull'ago vale allora,

$$F(y) = -\frac{\partial U(y)}{\partial y} = \mu\,\frac{\partial B(y)}{\partial y} = -\frac{\mu_0 \mu I a y}{\pi(y^2-a^2)^2}.$$

Tale forza è rivolta verso il basso per $y > a$ e verso l'alto per $y < -a$. Dato che in $y = -2a$ l'ago è in equilibrio la forza peso deve uguagliare la forza magnetica,

$$Mg = F(-2a) = \frac{2\mu_0 \mu I}{9\pi a^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{2\mu_0 \mu I}{9\pi a^2 g} = 4.5g.$$

d) In un punto $(x, 0, 0)$ con $x > 0$ e $x \gg a$ il tratto verticale del filo produce un campo magnetico trascurabile, mentre ciascuna delle due semirette produce un campo magnetico che equivale a quello di un filo rettilineo infinito, ovvero, in modulo, $B = \mu_0 I/2\pi a$. Per il campo totale si ottiene allora,

$$\vec{B}(Q) = -\frac{\mu_0 I}{\pi a}\vec{u}_z = -2 \cdot 10^{-3}\,T\,\vec{u}_z,$$

campo che risulta indipendente da x.