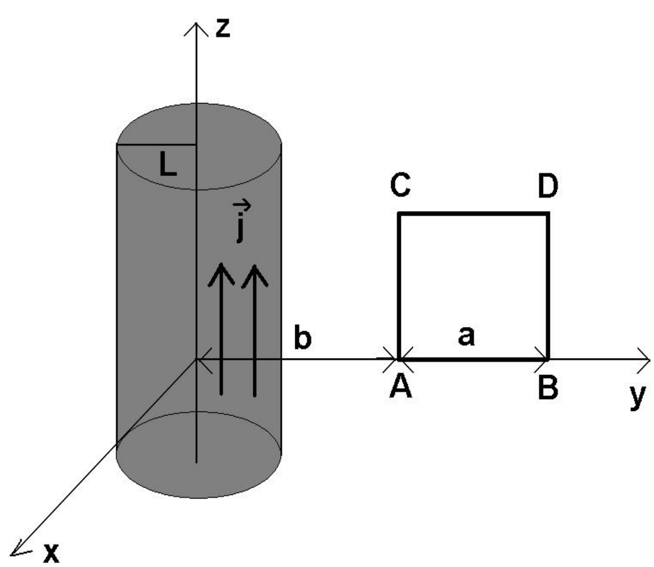
Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 03/02/2012

Problema 1

Tre particelle cariche con la stessa massa m e cariche q_1, q_2, q_3 sono poste nei vertici di un triangolo equilatero di lato $2b$, ovvero, nei punti con coordinate $P_1 = (-b, 0, 0)$, $P_2 = (b, 0, 0)$, $P_3 = (0, \sqrt{3}b, 0)$. Si suppongano noti b e m.
a) Supponendo che $q_1 = q_2 = q_3 = Q > 0$, con Q noto, si determini il lavoro L compiuto dal campo elettrico per formare questa distribuzione di carica, specificando se $L > 0$ o $L < 0$.
b) A un certo istante $t = 0$ tutte e tre le cariche vengono liberate simultaneamente e si osserva che nel limite di $t \to \infty$ la velocità della particella 3 tende al valore v_∞. Assumendo nota v_∞ si determini Q.
c) Si supponga d'ora in poi che le cariche valgano $q_1 = q_2 = Q > 0$, $q_3 = -Q$, e che si liberi solo la particella 3. Quanto vale la sua accelerazione $\vec{a}$ subito dopo essere stata liberata?
d) Quanto vale la sua velocità massima v_0?
e) **Facoltativo:** Si calcoli il periodo T del moto della particella 3 nell'approssimazione di piccole oscillazioni. Si discuta la validità dell'approssimazione.

Problema 2

Un cilindro di raggio L infinitamente lungo e coassiale con l'asse z è percorso da una densità di corrente $\vec{j} = j_0\,\vec{u}_z$ uniforme, con $j_0 > 0$.
a) Si determinino modulo e direzione del campo magnetico nelle regioni $r < L$ e $r > L$, con $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, tracciando il grafico del suo modulo $B(r)$ come funzione di r. [Suggerimento: si usi il teorema di Ampere.]
b) Si supponga che tra gli istanti $t = 0$ e $t = T$ la densità di corrente diminuisca passando da j_0 a zero, variando linearmente nel tempo. Si supponga noto T. Quanto vale per $0 < t < T$ la f.e.m. ε indotta in una spira conduttrice quadrata di lato a con vertici $A = (0, b, 0)$, $B = (0, b+a, 0)$, $C = (0, b, a)$, $D = (0, b+a, a)$, dove $b > L$? Nel tratto AB la corrente fluisce nel verso delle y crescenti o decrescenti?
c) Supponendo nota la resistenza R della spira si determini la carica che è fluita attraverso il vertice C tra gli istanti $t = 0$ e $t = T$.
d) **Facoltativo:** Si determinino le componenti cartesiane (B^x, B^y, B^z) del campo magnetico nella regione $r < L$, e si determini nella stessa regione un potenziale vettore $\vec{A}$. [Suggerimento: si scelga $A^x = A^y = 0$.]



Soluzioni

Problema 1

a) Il lavoro compiuto dal campo elettrico è l'opposto dell'energia elettrostatica del sistema,

$$L = -U = -\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) = -\frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b} < 0.$$

b) Una volta liberate, per motivi di simmetria le particelle si allontanano con la stessa velocità in modulo. Per $t \to \infty$ raggiungono l'infinito spaziale, sicché l'energia potenziale iniziale U si è trasformata in energia puramente cinetica,

$$U = 3 \cdot \frac{1}{2}\, m v_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad Q = v_\infty \sqrt{4\pi\varepsilon_0 b m}.$$

c) Nel punto P_3 le particelle che si trovano in P_1 e P_2 creano ciascuna un campo elettrico che forma con l'asse delle y un angolo di $\alpha = 30^o$, valendo in modulo $E_0 = Q/4\pi\varepsilon_0(2b)^2$. Sommando vettorialmente questi campi si ottiene un campo elettrico diretto lungo l'asse y dato da,

$$\vec{E} = 2E_0\, cos\alpha\, \vec{u}_y = \frac{\sqrt{3}Q}{16\pi\varepsilon_0 b^2}\vec{u}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{Q}{m}\,\vec{E} = -\frac{\sqrt{3}Q^2}{16\pi\varepsilon_0 b^2 m}\,\vec{u}_y.$$

d) Per motivi di simmetria la particella si muove lungo l'asse y ed è quindi sufficiente calcolare il potenziale creato dalle particelle che si trovano in P_1 e P_2 lungo tale asse,

$$\varphi(y) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2+b^2}}.$$

La velocità massima v_0 viene raggiunta per $y = 0$, sicché dalla conservazione dell'energia si ottiene,

$$-Q\,\varphi\left(\sqrt{3}b\right) = \frac{1}{2}\, m v_0^2 - Q\,\varphi(0) \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 b m}}.$$

e) Scrivendo l'equazione del moto della particella lungo l'asse y, $ma = m\ddot{y} = -QE^y = Q\,\partial\varphi(y)/\partial y$, e linearizzandola attorno al punto di equilibrio $y = 0$ si ottiene,

$$\ddot{y} = -\frac{Q^2 y}{2\pi\varepsilon_0 m (y^2+b^2)^{3/2}} \approx -\frac{Q^2 y}{2\pi\varepsilon_0 m b^3} = -\omega^2 y \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{Q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m b^3}.$$

Questo valore fornisce solo l'*ordine di grandezza* del periodo esatto, poiché la particella non compie "piccole oscillazioni". Infatti, durante il suo moto oscillatorio y varia tra $\sqrt{3}b$ e $-\sqrt{3}b$, mentre la forza,

$$F(y) = Q\,\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} = -\frac{Q^2 y}{2\pi\varepsilon_0 (y^2+b^2)^{3/2}},$$

può essere approssimata con il suo andamento linearizzato,

$$F(0) + yF'(0) = -\frac{Q^2 y}{2\pi\varepsilon_0 b^3}, \quad \text{solo se} \quad |y| \ll b.$$

Problema 2

a) Per motivi di simmetria le linee di campo di $\vec{B}$ sono circonferenze concentriche con l'asse z. Per il teorema di Ampere per $r > L$ il modulo del campo magnetico è uguale a quello prodotto da un filo percorso dalla corrente $I = j_0 \pi L^2$, ovvero, $B = \mu_0 I/2\pi r$. Per $r < L$ si può applicare il teorema di Ampere a una circonferenza di raggio r,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 \left(\pi r^2 j_0\right) \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}.$$

In conclusione,

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_0 r}{2}, & \text{per } r < L, \\ \dfrac{\mu_0 j_0 L^2}{2r}, & \text{per } r > L. \end{cases} \tag{1}$$

b) Per $0 < t < T$ la densità di corrente è data da $j(t) = j_0 - j_0 t/T$. Trovandosi la spira nella regione $r > L$ il campo magnetico si ottiene dalla seconda delle (1) con la sostituzione $j_0 \to j(t)$. Scegliendo come verso della spira quello orario, per il flusso di $\vec{B}$ si ottiene allora,

$$\Phi = \int_b^{b+a} B(r)\, a\, dr = a \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 j(t) L^2}{2r}\, dr = \frac{a\mu_0 j(t) L^2}{2} \ln \frac{a+b}{b}.$$

Di conseguenza, dato che $dj(t)/dt = -j_0/T$,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a\mu_0 j_0 L^2}{2T} \ln \frac{a+b}{b} > 0.$$

Tale f.e.m. tende quindi a far fluire la corrente in senso orario, sicché lungo il tratto AB essa fluisce nel verso delle y decrescenti.
c) Visto che ε è costante anche la corrente $I = \varepsilon/R$ è costante, e quindi,

$$Q = TI = \frac{T\varepsilon}{R} = \frac{a\mu_0 j_0 L^2}{2R} \ln \frac{a+b}{b}.$$

d) Visto che le linee di campo sono circonferenze, per $r < L$ si ha,

$$B^x = -\frac{\mu_0 j_0 y}{2}, \quad B^y = \frac{\mu_0 j_0 x}{2}, \quad B^z = 0.$$

Un possibile potenziale vettore, soddisfacente $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, è dato da,

$$A^x = 0, \quad A^y = 0, \quad A^z = -\frac{\mu_0 j_0}{4}(x^2 + y^2).$$