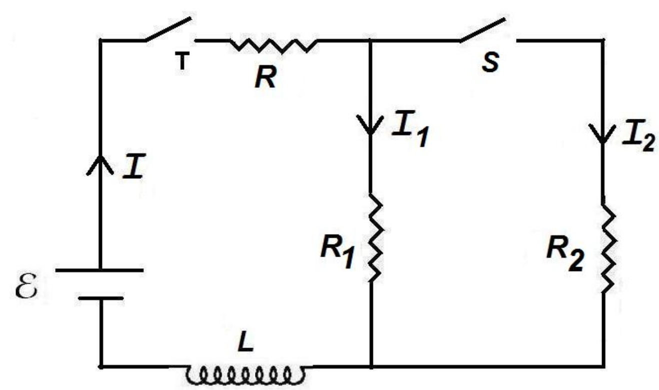
Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 04/02/2013

Problema 1
Due sfere conduttrici concentriche di raggi rispettivamente R ed $2R$ hanno come centro l'origine $O = (0, 0, 0)$. Le sfere sono cariche e la densità superficiale della sfera esterna vale $\sigma > 0$ e quella della sfera interna $-\sigma$.
a) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ come funzione del raggio r nelle zone $r \leq R$, $R \leq r \leq 2R$ e $r \geq 2R$.
b) Una particella di prova di massa m e carica $-q < 0$ a un certo istante si trova nel punto $P_1 = \left(0, 2\sqrt{2}R, 2\sqrt{2}R\right)$ con una velocità che in modulo vale v_1 e successivamente colpisce la sfera esterna nel punto $P_2 = (0, 2R, 0)$ con una velocità che in modulo vale $v_2 > v_1$. Supponendo note le quantità v_1, v_2, m, R e q e trascurando la forza peso si determini σ.
c) Si collegano le due sfere attraverso un sottile filo conduttore. Si determini la densità superficiale di carica σ^* della sfera esterna dopo il collegamento.
d) **Facoltativo:** se invece di collegare le due sfere si collega la sfera esterna a terra, quanto vale la sua densità superficiale di carica $\widehat{\sigma}$ dopo il collegamento?
e) **Facoltativo:** si determini l'energia elettrostatica ΔU che viene dissipata quando si collegano le due sfere come nel quesito c).

Problema 2
Nel circuito in figura inizialmente l'interruttore S è chiuso e l'interruttore T viene chiuso all'istante $t = 0$. I valori delle resistenze nei rami verticali sono $R_1 = 2R$ e $R_2 = 4R$. Si considerino note le quantità R, L e la differenza di potenziale costante $\mathcal{E}$.



a) Si determinino le correnti a regime I_1^∞ e I_2^∞ che passano per le resistenze R_1 e R_2 per tempi molto grandi.
b) Si determini la costante di tempo caratteristica τ del circuito in termini di R e L. [*Suggerimento*: si consideri un opportuno circuito equivalente.]
c) Si determini l'energia U_a immagazzinata nell'induttore all'istante $t_a = L/R$.
d) Si supponga che all'istante t_a l'interruttore S venga aperto. Si determini la potenza P dissipata nella resistenza R_1 immediatamente dopo l'apertura dell'interruttore.
e) **Facoltativo:** supponendo che all'istante t_a l'interruttore S sia stato aperto si determini la corrente $I'(t)$ passante per l'induttore a un generico istante $t > t_a$.

Soluzioni

Problema 1

a) Il potenziale si determina i) sfruttando che una distribuzione sferica Q crea un potenziale che al suo interno è costante e al suo esterno vale – a meno di una costante additiva – $Q/4\pi\varepsilon_0 r$, ii) usando il principio di sovrapposizione e iii) imponendo la continuità di $\varphi(r)$ in $r = R$ e $r = 2R$. Una possibile scelta è

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}, & \text{per } r \leq R, \\ \dfrac{-R^2\sigma}{\varepsilon_0 r}, & \text{per } R \leq r \leq 2R, \\ \dfrac{3R^2\sigma}{\varepsilon_0 r} - \dfrac{2R\sigma}{\varepsilon_0}, & \text{per } 2R \leq r. \end{cases} \tag{1}$$

b) Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}\,mv_1^2 - q\varphi(4R) = \frac{1}{2}\,mv_2^2 - q\varphi(2R),$$

dove $4R$ e $2R$ sono rispettivamente le distanze di P_1 e P_2 dall'origine. Usando la terza formula in (1) ne segue che

$$\frac{1}{2}\,m(v_2^2 - v_1^2) = q(\varphi(2R) - \varphi(4R)) = q\,\frac{3R^2\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{4R}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2m\varepsilon_0(v_2^2 - v_1^2)}{3qR}.$$

c) Dopo il collegamento le due sfere devono avere lo stesso potenziale e pertanto il campo elettrico nell'intercapedine tra le sfere deve annullarsi. Durante il collegamento la carica $-4\pi R^2\sigma$ della sfera interna si trasferisce quindi sulla sfera esterna, che possiede dunque carica totale $Q = 4\pi(2R)^2\sigma - 4\pi R^2\sigma = 12\pi R^2\sigma$. Risulta quindi $\sigma^* = Q/4\pi(2R)^2 = 3\sigma/4$.

d) Se si collega la sfera esterna a terra il suo potenziale deve uguagliare quello dell'infinito. Il campo elettrico totale al suo esterno deve quindi annullarsi, sicché la sua carica $4\pi(2R)^2\widehat{\sigma}$ deve essere uguale e opposta alla carica $-4\pi R^2\sigma$ della sfera interna. Si ottiene $4\pi(2R)^2\widehat{\sigma} = 4\pi R^2\sigma$, da cui $\widehat{\sigma} = \sigma/4$.

e) L'energia elettrostatica in generale è data da $U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d^3x$. Se si collegano le due sfere il campo elettrico cambia solo nella regione $R < r < 2R$, passando (in modulo) da $E = Q_1/4\pi\varepsilon_0 r^2 = (4\pi R^2)\sigma/4\pi\varepsilon_0 r^2 = R^2\sigma/\varepsilon_0 r^2$ a zero. L'energia elettrostatica diminuisce quindi di

$$\Delta U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^{2R}\left(\frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}\right)^2 d^3x = \frac{\pi R^3\sigma^2}{\varepsilon_0}.$$

Problema 2

a) La maglia contenente R_1 e R_2 è equivalente a un circuito con resistenza $R_\parallel = R_1R_2/(R_1 + R_2) = 4R/3$. Il circuito complessivo è quindi equivalente a un circuito "RL" con resistenza equivalente $R_e = R + R_\parallel = 7R/3$. A regime le correnti sono costanti ed essendo $LdI/dt = 0$ la corrente che attraversa l'induttore è data da $I^\infty = \mathcal{E}/R_e = 3\mathcal{E}/7R$. Dalle equazioni $I_1^\infty R_1 = I_2^\infty R_2$ e $I^\infty = I_1^\infty + I_2^\infty$ si ottiene $I_1^\infty = 2\mathcal{E}/7R$ e $I_2^\infty = \mathcal{E}/7R$.

b) Risolvendo l'equazione del circuito equivalente $\mathcal{E} = R_eI + L\frac{dI}{dt}$ con la condizione iniziale $I(0) = 0$ si ottiene

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_e}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R_e} = \frac{3L}{7R}.$$

c) All'istante $t_a = L/R$ per l'induttore passa la corrente $I_a = I(t_a) = \mathcal{E}(1 - e^{-7/3})/R_e$. Risulta quindi

$$U_a = \frac{1}{2}\, L\, I_a^2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_e^2}\left(1 - e^{-7/3}\right)^2 .$$

d) La corrente che passa per l'induttore non può variare in modo discontinuo. Subito dopo l'apertura dell'interruttore S all'istante t_a la corrente che passa per la resistenza R_1 deve quindi uguagliare la corrente I_a che passa per l'induttore in quell'istante e pertanto $P = R_1 I_a^2$.
e) Per $t > t_a$ il circuito equivale a un circuito "RL" con resistenza equivalente $R_e' = R_1 + R = 3R$ con equazione

$$\mathcal{E} = R_e' I' + L\frac{dI'}{dt}.$$

Vista la condizione iniziale $I'(t_a) = I_a$ la soluzione dell'equazione è

$$I'(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_e'} + \left(I_a - \frac{\mathcal{E}}{R_e'}\right) e^{-(t-t_a)/\tau'}, \quad \tau' = \frac{L}{R_e'} = \frac{L}{3R}.$$