Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 05/09/2012

Problema 1

Quattro particelle cariche di ugual massa m sono fissate nei vertici $P_1 = (-a, 0, 0)$, $P_2 = (0, a, 0)$, $P_3 = (a, 0, 0)$ e $P_4 = (0, -a, 0)$ di un quadrato di lato $b = \sqrt{2}a$. Le particelle che si trovano in P_1 e P_3 hanno carica $Q > 0$ e quelle che si trovano in P_2 e P_4 hanno carica $-Q < 0$. Si trascuri la forza peso.

a) Si determini il lavoro L, specificandone il segno, compiuto dal campo elettrico per formare questa distribuzione di carica.

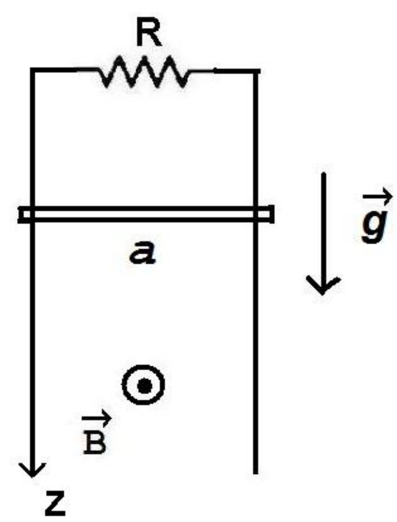
b) A un certo istante la particella che si trova in P_2 viene liberata. Si determini modulo, direzione e verso della sua accelerazione $\vec{a}$ subito dopo essere stata liberata.

c) Si determini la velocità v della particella di cui al quesito b) nell'istante in cui passa per il punto $O = (0, 0, 0)$.

d) **Facoltativo:** si determini la velocità $v(y)$ della particella di cui al quesito b) quando si trova in un generico punto $P = (0, y, 0)$ con $y < a$.

Problema 2

Nel circuito in figura un'asta conduttrice di massa m e lunghezza a è libera di scivolare senza attrito lungo due guide verticali, anch'esse conduttrici, mantenendosi sempre orizzontale. Il sistema è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante ortogonale all'asta e alle guide, con verso uscente dal foglio. Nel tratto orizzontale fisso del circuito è inserito un resistore. Si assuma che le guide e l'asta abbiano resistenza trascurabile e si considerino note m, a, B ed R. Si supponga che a un certo istante l'asta venga lasciata cadere con velocità iniziale nulla.



a) Si determini la velocità asintotica v_∞ della sbarra, raggiunta dopo un tempo molto lungo.

b) Si determini il valore asintotico I_∞ della corrente.

c) Si determini l'energia $\mathcal{P} = d\mathcal{E}/dz$ che a regime viene dissipata per effetto Joule per unità di spazio percorso, dove z indica la posizione dell'asta.

Soluzioni

Problema 1

a) Il lavoro compiuto dal campo elettrico vale $L = -U$ dove U è l'energia elettrostatica del sistema di cariche. Vale

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-4 \cdot \frac{Q^2}{b} + 2 \cdot \frac{Q^2}{2a}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\,(-2\sqrt{2}+1)$$

e quindi

$$L = -U = \frac{Q^2(2\sqrt{2}-1)}{4\pi\varepsilon_0 a} > 0.$$

b) Per motivi di simmetria il campo elettrico creato dalle altre tre cariche in P_2 ha solo una componente y, che è data da

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2 \cdot \frac{Q}{b^2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{Q}{(2a)^2}\right) = \frac{Q(2\sqrt{2}-1)}{16\pi\varepsilon_0 a^2} > 0.$$

Essendo la carica della particella in P_2 negativa la sua accelerazione $\vec{a}$ inizialmente è rivolta nella direzione delle y decrescenti. La sua componente a_y si ricava da

$$ma_y = (-Q)E_y \quad \Rightarrow \quad a_y = -\frac{QE_y}{m} = -\frac{Q^2(2\sqrt{2}-1)}{16\pi\varepsilon_0 a^2 m} < 0.$$

c) Il potenziale elettrico creato sull'asse y dalle particelle che si trovano in P_1, P_3 e P_4 è dato da

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q}{\sqrt{y^2+a^2}} - \frac{Q}{|y+a|}\right).$$

Dalla conservazione dell'energia si ottiene allora

$$-Q\varphi(a) = -Q\varphi(0) + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Q^2(3-2\sqrt{2})}{4\pi\varepsilon_0 ma}}.$$

d) Come sopra

$$-Q\varphi(a) = -Q\varphi(y) + \frac{1}{2}mv^2(y) \quad \Rightarrow \quad v(y) = \sqrt{\frac{2Q(\varphi(y)-\varphi(a))}{m}}.$$

Problema 2

a) La forza elettromotrice indotta vale in modulo $\varepsilon = aBv$ e induce una corrente $I = \varepsilon/R = aBv/R$ che scorre in senso orario. In questo modo essa crea infatti un campo magnetico entrante nel foglio, che contrasta l'aumento del flusso del campo magnetico esterno (legge di Lenz). La forza magnetica agente sull'asta è data in modulo da

$$F = aBI = \frac{a^2B^2v}{R}$$

ed è rivolta verso l'alto. A regime questa forza viene bilanciata dalla forza peso

$$mg = \frac{a^2B^2v_\infty}{R} \quad \Rightarrow \quad v_\infty = \frac{mgR}{a^2B^2}.$$

b) La corrente asintotica è data da

$$I_\infty = \frac{aBv_\infty}{R} = \frac{mg}{aB}.$$

c) La potenza dissipata a regime per effetto Joule è data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = RI_\infty^2.$$

L'energia dissipata a regime per unità di spazio percorso è quindi ($v_\infty = dz/dt$)

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{v_\infty}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{RI_\infty^2}{v_\infty} = mg.$$

Allo stesso risultato si arriva osservando che, essendo a regime la velocità dell'asta costante, la potenza fornita dalla forza peso mgv_∞ deve eguagliare la potenza dissipata RI_∞^2.