Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 11/02/2014

Problema 1

Nell'intercapedine tra due superfici cilindriche di lunghezza infinita, con asse l'asse z e raggi a e $2a$, si trova una distribuzione uniforme di carica con densità di volume $\rho > 0$.

a) Si determini il campo elettrico in tutto lo spazio, distinguendo le regioni $r < a$, $a < r < 2a$ e $2a < r$, dove $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, e si tracci qualitativamente il grafico del suo modulo $E(r)$ come funzione di r.

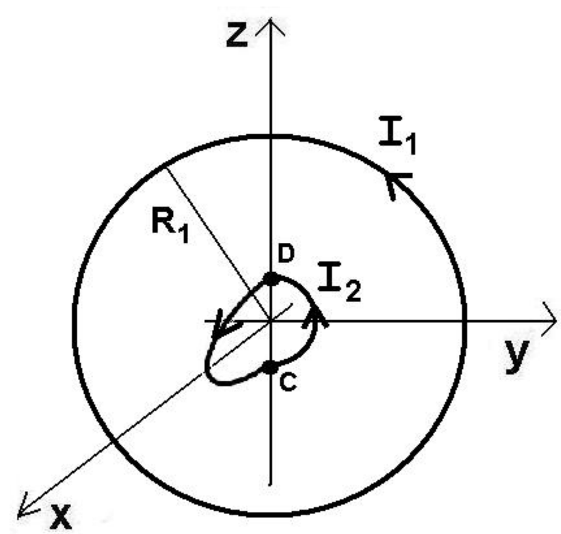
b) Si determini il potenziale φ in tutto lo spazio, imponendo che si annulli sull'asse z.

c) Una particella di massa m e carica $q > 0$ all'istante $t = 0$ si trova nell'origine con velocità $\vec{v}_0 = (w, \sqrt{3}w, 2w)$, $w > 0$. Considerando note m, q, w, a e ρ, e supponendo che la particella possa attraversare l'intercapedine, si determinino le componenti della sua velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ nell'istante in cui attraversa la superficie cilindrica esterna. Si trascuri la forza peso.

d) **Facoltativo**: supponendo noto l'istante t_1 in cui la particella attraversa la superficie esterna, si determinino le coordinate della sua posizione $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in quell'istante.

Problema 2

Un anello conduttore di raggio R_1 giacente nel piano yz, con centro l'origine, è percorso da una corrente costante I_1. Una spira rigida composta da due semicirconferenze di ugual raggio R_2 con centro comune l'origine, una giacente nel piano xz e l'altra nel piano yz, è percorsa da una corrente costante I_2.



a) Si determini il momento magnetico $\vec{\mu}_s$ della spira.

b) Si determini il campo magnetico totale $\vec{B}$ generato dall'anello e dalla spira nel punto $P = (L, 0, 0)$, con $L \gg R_1$ e $L \gg R_2$. *Suggerimento:* il campo di dipolo magnetico ha la forma generale

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right).$$

c) Si determini il campo magnetico $\vec{B}_0$ generato dal solo anello nell'origine.

d) Si supponga ora che valga $R_2 \ll R_1$, che l'anello sia fissato e che la spira possa invece ruotare attorno al diametro fisso CD appartenente all'asse z, vedi figura. Di quale angolo φ deve ruotare la spira rispetto alla posizione indicata in figura per portarsi nella posizione di equilibrio stabile?

e) **Facoltativo**: nelle ipotesi di cui al quesito d) si determini il momento delle forze esterne $\vec{M}_{ext}$ che occorre applicare alla spira per tenerla in equilibrio nella posizione indicata in figura.

Soluzioni

Problema 1

a) Il campo elettrico è a simmetria cilindrica, ovvero $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ con $\vec{u}_r = (x, y, 0)/r$. Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica di altezza L e raggio r si trova

$$E(r) = \begin{cases} 0, & \text{per } r < a, \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right), & \text{per } a < r < 2a, \\ \dfrac{3\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}, & \text{per } 2a < r. \end{cases}$$

b) Imponendo $E(r) = -\partial\varphi(r)/\partial r$, e tenendo conto della continuità del potenziale e della condizione $\varphi(0) = 0$, si trova

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & \text{per } r < a, \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{2}(a^2 - r^2) + a^2\ln(r/a)\right), & \text{per } a < r < 2a, \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left(-3\ln(r/2a) - \dfrac{3}{2} + \ln 2\right), & \text{per } 2a < r. \end{cases} \tag{1}$$

c) Essendo $v_0^2 = 8w^2$ e $v_z = 2w$, ponendo $v^2 = v_z^2 + v_r^2 = 4w^2 + v_r^2$, dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + q\varphi(0) = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(2a)$$

si trova

$$v_r = \sqrt{4w^2 - \frac{2q}{m}\varphi(2a)} = \sqrt{4w^2 + \frac{q\rho a^2}{m\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)}.$$

Si hai poi $v_x = v_r/2$ e $v_y = \sqrt{3}v_r/2$.
d) $P_1 = (a, \sqrt{3}a, 2wt_1)$.

Problema 2

a)

$$\vec{\mu}_s = \frac{\pi}{2}R_2^2 I_2(\vec{u}_x + \vec{u}_y).$$

b) Il momento di dipolo magnetico totale vale

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_s + \pi R_1^2 I_1\vec{u}_x = \left(\pi R_1^2 I_1 + \frac{\pi}{2}R_2^2 I_2\right)\vec{u}_x + \frac{\pi}{2}R_2^2 I_2\,\vec{u}_y,$$

sicché per il campo magnetico a grandi distanze in direzione x si ottiene

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi L^3}(3\mu_x\vec{u}_x - \vec{\mu}) = \frac{\mu_0}{4\pi L^3}(2\mu_x\vec{u}_x - \mu_y\vec{u}_y) = \frac{\mu_0}{4L^3}\left((2R_1^2 I_1 + R_2^2 I_2)\,\vec{u}_x - \frac{1}{2}R_2^2 I_2\,\vec{u}_y\right).$$

c) Dalla prima legge elementare di Laplace si trova

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\vec{u}_x.$$

d) All'equilibrio il momento magnetico della spira si deve allineare con $\vec{B}_0$, ovvero con l'asse x. La spira deve quindi ruotare di $\varphi = 45^o$ in senso orario.
e)

$$\vec{M}_{ext} = -\vec{\mu}_s \times \vec{B}_0 = \frac{\mu_0\pi R_2^2 I_1 I_2}{4R_1}\vec{u}_z.$$