Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 19/02/2013

Problema 1

Due anelli isolanti di raggio R giacciono in piani paralleli al piano xz, avendo come centri rispettivamente i punti $A = (0, -L, 0)$ e $B = (0, L, 0)$, con $L > 0$. Su ciascun anello è distribuita una carica $Q > 0$ con densità lineare uniforme. Si suppongano note le quantità Q, R e L.

a) Si determini il potenziale $\varphi(y)$ sull'asse y.

b) Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ sull'asse y e in particolare la sua componente $E^y(y)$.

c) Si osserva che una particella vincolata all'asse y, di massa m e carica $q > 0$ note, compie un moto periodico tra le posizioni $P_1 = (0, -L/2, 0)$ e $P_2 = (0, L/2, 0)$. Si determini la sua velocità massima v_M. Un tale moto è sempre possibile?

d) **Facoltativo:** si traccino qualitativamente i grafici delle funzioni $\varphi(y)$ e $E^y(y)$ nel caso in cui $R \ll L$.

Problema 2

Un conduttore filiforme infinito a forma di "L" disposto lungo i semiassi delle x positive e delle y positive è percorso da una corrente costante I che fluisce nel verso delle x decrescenti e delle y crescenti. Nel punto P di coordinate $(0, 0, b)$, $b > 0$, si trova un piccolo ago magnetico di momento magnetico che in modulo vale μ. Si considerino note le quantità I, b e μ.

a) Si determinino le componenti $B^x(z), B^y(z)$ e $B^z(z)$ del campo magnetico sull'asse z come funzioni di z e si determini la direzione di equilibrio stabile dell'ago.

b) Supponendo che l'ago sia diretto lungo l'asse delle x crescenti e che sia in equilibrio si determini il momento esterno $\vec{M}_{ext}$ applicato all'ago.

c) Si determini il lavoro meccanico L che deve compiere il campo magnetico per ruotare l'ago dalla direzione delle x crescenti alla direzione di equilibrio stabile.

d) **Facoltativo:** se l'ago è diretto lungo la direzione di equilibrio stabile, quanto vale la componente F_z della forza esercitata dal campo magnetico sull'ago?

Soluzioni

Problema 1

a) Nel punto $(0, y, 0)$ un tratto di arco $Rd\vartheta$ dell'anello centrato in B genera il potenziale $d\varphi_B = \lambda(Rd\vartheta)/4\pi\varepsilon_0\sqrt{(y-L)^2+R^2}$, dove la densità lineare di carica vale $\lambda = Q/2\pi R$. Integrando questa espressione in ϑ tra 0 e 2π e sommando il potenziale generato dall'anello centrato in A si ottiene

$$\varphi(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(y-L)^2+R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(y+L)^2+R^2}}\right).$$

b) Per motivi di simmetria sull'asse y il campo elettrico è diretto lungo l'asse y e si ha

$$E^y(y) = -\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y-L}{\left((y-L)^2+R^2\right)^{3/2}} + \frac{y+L}{\left((y+L)^2+R^2\right)^{3/2}}\right).$$

c) Per motivi di simmetria la velocità è massima in $y = 0$ e si annulla in $y = \pm L/2$. Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene allora

$$\frac{1}{2}mv_M^2 + q\varphi(0) = q\varphi(L/2) \quad \Rightarrow \quad v_M^2 = \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 m}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2+4R^2}} + \frac{1}{\sqrt{9L^2+4R^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2+R^2}}\right].$$

Affinché questo moto sia possibile è necessario che $\varphi(L/2) > \varphi(0)$, ovvero che il termine tra parentesi quadre sia positivo, cosa che succede se il rapporto R/L è sufficientemente piccolo.

d) $\varphi(y)$ è la somma di due "campane" di "larghezza" R centrate in $\pm L$ ed è una funzione positiva e pari. Graficamente si vede quindi che per $R \ll L$ $\varphi(y)$ ha un minimo in $y = 0$ e due massimi nelle vicinanze di $y = \pm L$. Eseguendo lo studio di funzione si può vedere – più precisamete – che per $R < \sqrt{2}L$ $\varphi(y)$ ha un minimo relativo in $y = 0$ e due massimi assoluti in $y = \pm y_0$, mentre per $R > \sqrt{2}L$ ha un massimo assoluto in $y = 0$ e nessun minimo. In questo secondo caso non esistono dunque posizioni di equilibrio stabile e particelle con carica $q > 0$ non possono compiere moti periodici.

Problema 2

a) Il tratto di filo disposto lungo il semiasse delle x crea sull'asse z un campo magnetico $\vec{B}_1$ che è metà di quello prodotto da un filo infinito ed è diretto lungo l'asse y, ovvero $\vec{B}_1 = (0, \frac{\mu_0 I}{4\pi z}, 0)$. Similmente l'altro tratto di filo crea il campo $\vec{B}_2 = (\frac{\mu_0 I}{4\pi z}, 0, 0)$. Il campo magnetico totale $\vec{B}(z) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ sull'asse z ha quindi componenti

$$B^x(z) = B^y(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}, \qquad B^z(z) = 0, \qquad |\vec{B}(z)| = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi|z|}.$$

Per $z = b > 0$ il campo magnetico è diretto lungo la bisettrice del primo quadrante del piano xy. La direzione di equilibrio stabile dell'ago è quindi individuata dal versore

$\vec{n} = (1,1,0)/\sqrt{2}$.
b) Visto che si ha equilibrio deve valere $\vec{M}_{ext} + \vec{M}_B = 0$ con $\vec{M}_B = \vec{\mu} \times \vec{B}(b)$ e $\vec{\mu} = \mu \vec{u}_x$. Di conseguenza

$$\vec{M}_{ext} = -\mu \vec{u}_x \times \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\vec{u}_x + \vec{u}_y) = -\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} \vec{u}_z.$$

c) Si ha $L = -\Delta U_m = -(U_m^f - U_m^i)$ dove $U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(b)$. Con $U_m^f = -\mu \vec{n} \cdot \vec{B}(b) = -\sqrt{2}\mu\mu_0 I/4\pi b$ e $U_m^i = -\mu \vec{u}_x \cdot \vec{B}(b) = -\mu\mu_0 I/4\pi b$ si ottiene

$$L = \frac{(\sqrt{2}-1)\mu\mu_0 I}{4\pi b} > 0.$$

d) Vale $F_z = -\partial U_m/\partial z$. L'ago è diretto lungo $\vec{n}$ e si trova in un punto $(0,0,z)$. Per calcolare F_z è quindi sufficiente calcolare U_m sull'asse z: $U_m = -\mu \vec{n} \cdot \vec{B}(z) = -\sqrt{2}\mu\mu_0 I/4\pi z$. Di conseguenza

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{2}\mu\mu_0 I}{4\pi z} \right) \bigg|_{z=b} = -\frac{\sqrt{2}\mu\mu_0 I}{4\pi b^2}.$$