Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 21/02/2012

Problema 1

Nella regione compresa tra i piani infiniti $x = -b$ e $x = b$ si trova una distribuzione di carica con densità di volume uniforme $\rho > 0$.

a) Si determini il campo elettrico nelle tre regioni $x < -b$, $|x| < b$, $x > b$, e si tracci il grafico della sua componente x come funzione di x. [Suggerimento: si usi il *teorema di Gauss* scegliendo un'opportuna superficie cilindrica.]

b) Si determini il potenziale $\varphi(x)$ nelle tre regioni $x < -b$, $|x| < b$, $x > b$, e si tracci il suo grafico come funzione di x.

c) Una particella con massa m e carica $-q$, $q > 0$, all'istante iniziale $t = 0$ si trova nella posizione $P = (b/2, 0, 0)$ con velocità nulla. Si determini la coordinata $x(t)$ della particella a un istante t generico.

d) **Facoltativo:** si supponga che la particella di cui al punto c) si trovi inizialmente nella posizione $Q = (2b, 0, 0)$ con velocità $\vec{v}_0 = (v_0^x, v_0^y, v_0^z)$ con $v_0^x > 0$. Per quali valori di v_0^x, v_0^y, v_0^z la particella a un certo istante riesce ad attraversare il piano di equazione $x = -3b$?

Problema 2

Un filo di rame di sezione circolare di raggio a forma un solenoide lineare molto lungo di raggio r fatto di N avvolgimenti molto fitti. Si supponga che $a \ll r$. All'istante $t = 0$ il solendoide viene chiuso su un generatore di differenza di potenziale costante ε. Si considerino noti a, r, N, ε, nonché la resistività del rame ρ.

a) Si determinino la resistenza R e l'induttanza L del solenoide.

b) Si determinino la corrente $I(t)$ a un istante generico e la corrente di regime I_∞, raggiunta per $t \to \infty$. [Suggerimento: il solenoide può essere assimilato a un circuito RL in serie.]

c) A quale istante T viene raggiunto il 99% della corrente di regime?

d) Si determini la forza elettromotrice ε_1 che viene indotta all'istante $t_0 = 2L/R$ in una circonferenza concentrica con l'asse del solenoide di raggio $r_1 = 2r$.

e) **Facoltativo:** si determini la forza elettromotrice ε_2 che viene indotta all'istante $t_0 = 2L/R$ in una circonferenza concentrica con l'asse del solenoide di raggio $r_2 = r/2$.

Soluzioni

Problema 1

a) Per motivi di simmetria il campo elettrico è diretto lungo l'asse x e dipende solo da x, $\vec{E}(\vec{x}) = (E(x), 0, 0)$, e inoltre $E(x)$ è una funzione antisimmetrica,

$$E(-x) = -E(x).$$

Per $|x| > b$ la distribuzione di carica equivale a una distribuzione di carica piana con densità superficiale $\sigma = 2b\rho$, come si verifica facilmente usando il teorema di Gauss. Per $|x| > b$ il campo elettrico vale dunque $E = \pm\sigma/2\varepsilon_0 = \pm\rho b/\varepsilon_0$. Per $|x| < b$ possiamo considerare come superficie gaussiana S un cilindro con asse l'asse x e con basi parallele al piano (y, z), situate rispettivamente in x e $-x$. Essendo $\vec{E}$ parallelo all'asse x la superficie laterale del cilindro non contribuisce al flusso del campo elettrico attraverso S. Indicando con A l'area delle basi il teorema di Gauss dà allora,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = AE(x) - AE(-x) = 2AE(x) = \frac{(2xA)\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

Si ottiene dunque,

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{\rho b}{\varepsilon_0}, & \text{per } x < -b, \\ \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}, & \text{per } |x| < b, \\ \dfrac{\rho b}{\varepsilon_0}, & \text{per } x > b. \end{cases} \tag{1}$$

Si noti che il campo elettrico è una funzione continua.

b) Vista la forma di $\vec{E}$ è sufficiente trovare una funzione *continua* $\varphi(x)$ tale che $E(x) = -d\varphi(x)/dx$. Una scelta possibile è,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho b x}{\varepsilon_0}, & \text{per } x < -b, \\ -\dfrac{\rho(x^2 + b^2)}{2\varepsilon_0}, & \text{per } |x| < b, \\ -\dfrac{\rho b x}{\varepsilon_0}, & \text{per } x > b. \end{cases} \tag{2}$$

c) Dato che la particella è inizialmente a riposo e il campo elettrico è diretto lungo l'asse x, il moto avviene lungo tale asse. Visto che il punto $P = (b/2, 0, 0)$ appartiene alla regione $|x| < b$ l'equazione del moto è,

$$a = \ddot{x} = -\frac{qE(x)}{m} = -\frac{q\rho}{\varepsilon_0 m}\, x = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{\frac{q\rho}{\varepsilon_0 m}}.$$

Il moto è pertanto armonico semplice, e visti i dati iniziali $x(0) = b/2$, $v(0) = 0$, si ottiene $x(t) = (b/2)\, cos(\omega t)$.

d) Non avendo il campo elettrico componenti lungo y e z le componenti v_0^y e v_0^z restano costanti. Essendo $v_0^x > 0$ inizialmente la particella si muove nel verso delle x crescenti, ma a un certo istante, essendo la sua carica negativa ed $E(x) > 0$ per $x > b$, inverte il suo moto ripassando per il punto $x = 2b$ con velocità $-v_0^x$. Dopodiché prosegue nella direzione delle x decresenti. Considerando solo il moto lungo x e indicando con v^x la componente x della velocità nel punto $x = -3b$, dalla conservazione dell'energia si ottiene,

$$\frac{1}{2}\, m(v_0^x)^2 - q\varphi(2b) = \frac{1}{2}\, m(v^x)^2 - q\varphi(-3b) \quad \Rightarrow \quad (v^x)^2 = (v_0^x)^2 - \frac{2q\rho b^2}{m\varepsilon_0}.$$

Affinché la particella riesca a raggiungere il piano $x = -3b$ si deve avere $(v^x)^2 > 0$, e quindi $v_0^x > \sqrt{2q\rho b^2/m\varepsilon_0}$.

NB: nella soluzione dei quesiti c) e d) non si è tenuto della forza peso. Tuttavia, è facile rendersi conto che le risposte trovate restano valide anche in presenza della forza peso.

Problema 2

a) $R = \rho\, l/\Sigma = \rho\,(2\pi r N)/\pi a^2 = 2N\rho r/a^2$. L'induttanza di un solendoide è $L = \mu_0 N^2 A/\mathcal{L}$, dove A è la sua sezione ed $\mathcal{L}$ la sua lunghezza. In questo caso $A = \pi r^2$ ed $\mathcal{L} = (2a)N$, sicché $L = \mu_0 N \pi r^2/2a$.

b) L'equazione del circuito è,

$$\varepsilon = L\,\frac{dI}{dt} + RI. \tag{3}$$

Dato che per $t \to \infty$ la corrente tende a una costante si ha $\varepsilon = RI_\infty$, sicché $I_\infty = \varepsilon/R$. D'altra parte la soluzione generale della (3) è,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + Ce^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Dalla condizione iniziale $I(0) = 0$ si ricava $C = -\varepsilon/R$, sicché,

$$I(t) = I_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{4}$$

c) All'istante T si ha,

$$I(T) = I_\infty\left(1 - e^{-T/\tau}\right) = \frac{99}{100}\,I_\infty \quad \Rightarrow \quad T = \ln(100)\,\tau \approx 4.6\tau.$$

d) Dato che la corrente è variabile nel tempo il campo magnetico prodotto dal solenoide varia nel tempo, e per la legge di Faraday induce un campo elettrico le cui linee di campo per motivi di simmetria sono circonferenze concentriche con l'asse del solenoide. All'esterno del solendoide il campo magnetico è zero, sicché il flusso del campo magnetico attraverso la circonferenza di raggio $r_1 = 2r$ è $\Phi_1(t) = \pi r^2 B(t)$, dove,

$$B(t) = \mu_0 n I(t) = \mu_0\,\frac{N}{\mathcal{L}}\,I(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2a}.$$

Per un istante generico si ottiene,

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -\pi r^2\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi r^2}{2a}\,\frac{dI(t)}{dt}. \tag{5}$$

Dato che $t_0 = 2L/R = 2\tau$, dalla (4) si ottiene,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{I_\infty}{\tau}\,e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI(t_0)}{dt} = \frac{I_\infty}{e^2\tau},$$

e quindi,

$$\varepsilon_1 = -\frac{\mu_0 \pi r^2 I_\infty}{2ae^2\tau} = -\frac{\mu_0 \pi r^2 \varepsilon}{2ae^2 L} = -\frac{\varepsilon}{Ne^2}.$$

e) Se il raggio della circonferenza è $r_2 = r/2$ il flusso del campo magnetico è $1/4$ di quello calcolato al punto precedente, sicché $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/4$.

NB: se la corrente in un solenoide non varia linearmente, ovvero, non ha un andamento del tipo $I(t) = \alpha t$, la *corrente di spostamento* nelle equazioni di Maxwell non può essere trascurata, in quanto $\partial\vec{E}/\partial t \neq 0$. Dalla (5) si vede, infatti, che la f.e.m. indotta, e quindi il campo elettrico indotto, dipendono dal tempo. Come conseguenza, a) si crea un debole campo magnetico anche all'esterno del solenoide e, b) il campo elettrico ha un termine aggiuntivo rispetto a quello dato dalla (5). Tuttavia, questi effetti possono essere trascurati se la corrente non varia troppo rapidamente, ovvero, se τ è sufficientemente grande.