Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 25/06/2012

Problema 1

Una distribuzione di carica è costituita da una carica puntiforme $Q > 0$ posta nell'origine e da una distribuzione lineare infinita di carica con densità $\lambda > 0$, disposta lungo la retta parallela all'asse z e passante per il punto A di coordinate $A = (0, a, 0)$, con $a > 0$.

a) Si determini il campo elettrico $\vec{E}$ sull'asse y e si tracci il grafico della componente $E^y(y)$ come funzione di y.

b) Si determini il potenziale elettrico $\varphi(y)$ sull'asse y e se ne tracci il grafico.

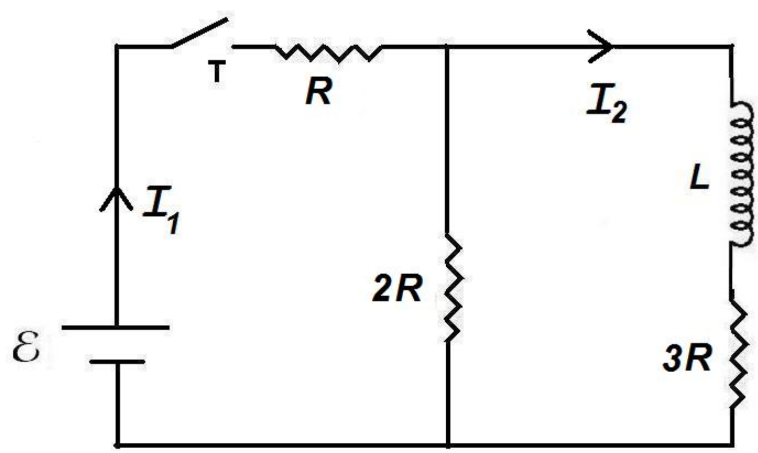
c) Si osserva che una particella di prova di carica Q e massa m, vincolata a muoversi senza attrito sull'asse y, si trova in equilibrio nel punto $P = (0, y^*, 0)$. Si determini y^*.

d) Si supponga che la particella di prova si trovi inizialmente nel punto B di coordinate $B = (0, 2a, 0)$ con velocità nulla. Quanto vale la sua velocità v_C nell'istante in cui passa per il punto C di coordinate $C = (0, 4a, 0)$?

e) **Facoltativo:** Si supponga che la particella di prova che si trova in B e la carica che si trova nell'origine vengano liberate simultaneamente e che le due particelle abbiano la stessa massa m. Quanto valgono le loro velocità nell'istante in cui la particella di prova passa per C?

Problema 2

Nel circuito in figura si suppongano noti i valori di ε, R ed L. Inizialmente l'interruttore T è chiuso.



a) Si determinino le correnti I_1 e I_2 che attraversano rispettivamente le resistenze R e $3R$ a regime, ovvero per tempi molto grandi.

b) A un certo istante $t = 0$, quando le correnti hanno raggiunto i valori di regime, l'interruttore T viene riaperto. Si determini l'istante t_a in cui la corrente che attraversa l'induttore si è ridotta a $I_2/2$.

c) Si indichi con $U_L(0)$ l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante $t = 0$. Si determini l'istante t_b in cui la sua energia si è ridotta a $U_L(0)/2$.

d) **Facoltativo:** si determinino le energie $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$ dissipate rispettivamente nelle resistenze $2R$ ed $3R$ tra gli istanti $t = 0$ e $t = t_b$.

e) **Facoltativo:** si supponga che la corrente nell'induttore all'istante $t_c = 2s$ valga $I_c = 3A$ e che all'istante $t_d = 4s$ valga $I_d = 2A$. Si determini l'istante t_b.

Soluzioni

Problema 1

a) Per motivi di simmetria sull'asse y il campo elettrico è diretto lungo l'asse y, $\vec{E}(\vec{x}) = (0, E^y(y), 0)$. Usando le note espressioni dei campi di una carica puntiforme e di una distribuzione lineare e applicando il principio di sovrapposizione si ottiene

$$E^y(y) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} + \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(y-a)}, & \text{per } y < 0, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} + \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(y-a)}, & \text{per } y > 0. \end{cases} \tag{1}$$

b) Il potenziale si trova applicando ancora il principio di sovrapposizione, oppure usando la relazione $E^y(y) = -\partial\varphi(y)/\partial y$:

$$\varphi(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|y|} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln|y-a|\,. \tag{2}$$

c) Affinché la particella possa essere in equilibrio in P la componente $E^y(y^*)$ si deve annullare. Deve valere $0 < y^* < a$, sicché occorre annullare la seconda espressione in (1):

$$E^y(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(y-a)} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^* = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 8Qa\lambda}}{4\lambda}.$$

d) Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = Q\varphi(2a) - Q\varphi(4a) \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q\lambda\ln 3}{\pi\varepsilon_0}\right)}.$$

e) Le particelle si muovono nel campo elettrico prodotto dalla distribuzione lineare λ nonché nel campo elettrico di interazione reciproca. L'energia totale conservata del sistema ha quindi la forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{QQ}{4\pi\varepsilon_0|y_1 - y_2|} - \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln|y_1 - a| + \ln|y_2 - a|\right),$$

dove y_1 e y_2 indicano le posizioni delle particelle. Per motivi di simmetria a ogni istante le particelle hanno velocità opposte e uguali in modulo, sicché a ogni istante hanno la stessa distanza dal punto A. Visto che inizialmente $y_1 = 2a$ e $y_2 = 0$ nello stato finale si ha pertanto $y_1 = 4a$ e $y_2 = -2a$. Indicando con v_f la comune velocità finale, dalla conservazione dell'energia si ottiene allora

$$\frac{QQ}{4\pi\varepsilon_0(2a)} - \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln|2a-a| + \ln|0-a|\right) = 2\cdot\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{QQ}{4\pi\varepsilon_0(6a)} - \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln|4a-a| + \ln|-2a-a|\right),$$

da cui,

$$v_f = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{Q^2}{12\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q\lambda\ln 3}{\pi\varepsilon_0}\right)}.$$

Problema 2

a) A regime le correnti hanno valori costanti, sicché la differenza di potenziale ai capi dell'induttore è zero. La resistenza equivalente R_0 del circuito si ottiene considerando il parallelo tra $2R$ e $3R$, ovvero $R_{\parallel} = 6R/5$, in serie con R. Di conseguenza $R_0 = R_{\parallel} + R = 11R/5$ e quindi $I_1 = \varepsilon/R_0 = 5\varepsilon/11R$. La corrente I_2 si ottiene da $R_{\parallel} I_1 = 3RI_2 \Rightarrow I_2 = 2I_1/5 = 2\varepsilon/11R$.

b) Quando l'interruttore viene aperto il circuito si comporta come un circuito (LR^*) con resistenza $R^* = 5R$ e corrente iniziale $I(0) = I_2$. L'equazione del circuito è quindi

$$L\,\frac{dI}{dt} + 5RI = 0, \quad \text{con soluzione} \quad I(t) = I_2\, e^{-t/\tau}, \quad \tau = L/5R.$$

Da $I(t_a) = I_2/2$ si ottiene allora $t_a = \tau \ln 2 = (\ln 2)L/5R$.

c) Vale $U_L(0) = \frac{1}{2}LI_2^2$. All'istante t_b l'energia immagazzinata vale invece

$$U_L(t_b) = \frac{1}{2}\,LI(t_b)^2 = \frac{1}{2}\,LI_2^2 e^{-2t_b/\tau} = \frac{1}{4}\,LI_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{\ln 2}{2}\,\tau = \frac{(\ln 2)L}{10R}.$$

d)

$$\varepsilon_2 = \int_0^{t_b} (2R)I^2(t)dt = 2RI_2^2 \int_0^{t_b} e^{-2t/\tau}dt = RI_2^2\,\tau\left(1 - e^{-2t_b/\tau}\right) = \frac{1}{2}RI_2^2\tau = \frac{1}{10}LI_2^2.$$

In modo analogo si trova

$$\varepsilon_3 = \frac{3}{2}\,\varepsilon_2 = \frac{3}{20}LI_2^2.$$

Si noti che $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = U_L(0)/2$.

e)

$$I_c = I_2\, e^{-t_c/\tau}, \quad I_d = I_2\, e^{-t_d/\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_c}{I_d} = e^{(t_d - t_c)/\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{t_d - t_c}{\ln(I_c/I_d)} = \frac{2s}{\ln(3/2)}.$$

Ne segue che

$$t_b = \frac{\ln 2}{2}\,\tau = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}\,s \approx 1.7s.$$