Compito di “Fisica II” – Laurea in Matematica – 27/06/2014

Problema 1

Su un tratto lungo $2L$ dell'asse y, centrato nell'origine, si trova una distribuzione lineare di carica con densità costante $\lambda > 0$. Lungo l'asse x è disposto un filo conduttore infinito, in cui fluisce una corrente costante I nel verso delle x crescenti.

a) Si determini il potenziale $\varphi(y)$ e il campo elettrico $\vec{E}(y)$ in un generico punto $(0, y, 0)$, con $|y| > L$.

b) Due particelle identiche di massa m e carica $q > 0$, vincolate a scorrere senza attrito lungo l'asse y, a un certo istante si trovano rispettivamente nei punti $A = (0, 3L, 0)$ e $D = (0, -3L, 0)$ con velocità nulle. Trascurando la forza peso si determini la velocità v_C della particella che inizialmente si trova in A, nell'istante in cui passa per il punto $C = (0, 4L, 0)$.

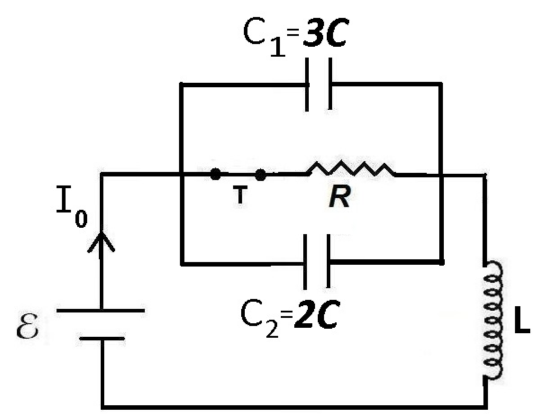
c) Si determini la reazione vincolare $\vec{F}$ che l'asse y esercita sulla particella che inizialmente si trova in A, nell'istante in cui passa per C.

d) Si verifichi che il campo elettrico $\vec{E}(y)$ di cui al quesito a) ha il corretto andamento asintotico per $|y| \to \infty$.

e) **Facoltativo**: si determini la velocità massima v_M della particella che inizialmente si trova in A.

Problema 2

Nel circuito in figura inizialmente l'interruttore T è chiuso e il sistema si trova a *regime*. Si considerino note le grandezze R, L, C e la differenza di potenziale costante $\mathcal{E}$.



a) Si determinino la corrente I_0 passante per il generatore e l'energia elettrostatica U_1 immagazzinata nel condensatore di capacità C_1.

b) All'istante $t = 0$ si apre l'interruttore T. Si scriva l'equazione differenziale a cui deve soddisfare la carica totale $Q(t)$ presente sui due condensatori per $t > 0$ e se ne determini la soluzione generale.

c) Si determini esplicitamente $Q(t)$.

d) Si determini la carica massima Q_2^* del condensatore di capacità C_2 per $t > 0$.

e) Quanto vale la potenza media w fornita dal generatore per $t > 0$?

Soluzioni

Problema 1

a) Sull'asse y il campo elettrico è parallelo all'asse: $\vec{E}(y) = E(y)\vec{u}_y$. Per $y > L$ si ha $\varphi(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{y+L}{y-L}$ e $E(y) = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0(y^2-L^2)}$, mentre per $y < -L$ si ha $\varphi(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{y-L}{y+L}$ e $E(y) = -\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0(y^2-L^2)}$.

b) Conservazione dell'energia:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(6L)} + (2q)\,\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{3L+L}{3L-L} = 2\left(\frac{1}{2}\,mv_C^2\right) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(8L)} + (2q)\,\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{4L+L}{4L-L}$$

$$\Rightarrow \qquad v_C = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{q}{24L} + 2\lambda \ln \frac{6}{5}\right)}.$$

c) In C il campo magnetico prodotto dal filo vale $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(4L)}\,\vec{u}_z$ e inoltre $\vec{v}_C = v_C\vec{u}_y$, sicché

$$\vec{F} = -\vec{F}_B = -q\vec{v}_C \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 I q v_C}{8\pi L}\,\vec{u}_x.$$

d) Per $|y| \to \infty$, visto che la carica totale è $Q = 2\lambda L$, si ha

$$\vec{E} = E(y)\vec{u}_y \quad \rightarrow \quad sgn(y)\,\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 y^2}\,\vec{u}_y = \frac{Q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

e)

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(6L)} + (2q)\,\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{3L+L}{3L-L} = 2\left(\frac{1}{2}\,mv_M^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_M = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{q}{6L} + \lambda \ln 4\right)}.$$

Problema 2

a) $I_0 = \mathcal{E}/R$, $U_1 = 3C\mathcal{E}^2/2$.

b) L'equazione del circuito è

$$\mathcal{E} = L\ddot{Q} + \frac{Q}{5C}, \tag{1}$$

con soluzione generale $Q(t) = 5C\mathcal{E} + A\,sen(\omega t + \varphi)$, $\omega = 1/\sqrt{5LC}$.

c) I dati iniziali sono $Q(0) = 5C\mathcal{E}$ e $\dot{Q}(0) = I_0$, sicché la (1) ammette la soluzione unica

$$Q(t) = 5\mathcal{E}C + \frac{\mathcal{E}\sqrt{5LC}}{R}\,sen\left(\frac{t}{\sqrt{5LC}}\right).$$

d) Visto che $Q_2(t) = 2Q(t)/5$ si ha

$$Q_2^* = 2\mathcal{E}C + \frac{2\mathcal{E}\sqrt{5LC}}{5R}.$$

e) $w = \langle \mathcal{E} I \rangle = \mathcal{E}\langle \dot{Q} \rangle = 0.$