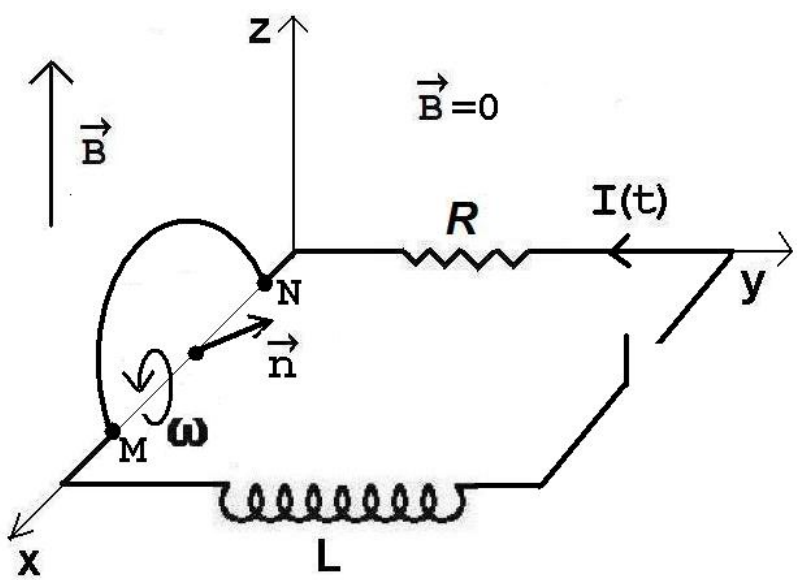
Compito di “Fisica II” – Laurea in Matematica – 29/01/2014

Problema 1
Si considerino due distribuzioni filiformi di carica infinitamente estese. La prima è disposta lungo l'asse x con densità lineare di carica $\lambda > 0$ e la seconda lungo l'asse y con densità lineare di carica $-\lambda < 0$.
a) Si determini il potenziale elettrostatico $\varphi(\vec{x})$ come funzione delle variabili cartesiane x, y e z in tutto lo spazio.
b) Si determinino le componenti cartesiane del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ in tutto lo spazio.
c) Si determini la forma analitica del campo elettrico $\vec{E}(x, y, 0)$ nel piano xy, tracciandone qualitativamente le linee di campo.
d) All'interno di un solenoide ideale con asse l'asse z, di lunghezza L, con N avvolgimenti e percorso da corrente I, si trova una particella carica. A un certo istante la particella attraversa il piano xy con velocità $\vec{v} = (v_0, 2v_0, v_1)$ e accelerazione nulla. Noti λ, I, L, N e v_0, e trascurando la forza peso, si determini la sua posizione $P = (x_0, y_0, 0)$.
e) **Facoltativo:** si individui una superficie equipotenziale del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$.

Problema 2
Nel circuito in figura la semicirconferenza di raggio r ruota con velocità angolare costante ω attorno al suo diametro fisso MN, con verso di rotazione concorde con l'asse x. Inizialmente l'interruttore è aperto. Nella regione delle y *negative* vi è un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $B > 0$. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore e in quell'istante la semicirconferenza giace nel semipiano xz, $z > 0$. Si assumano note le grandezze r, L, R, B e ω.



a) Si determini la f.e.m. indotta $\varepsilon(t)$ come funzione del tempo nell'intervallo $0 < t < \pi/\omega$, orientando il circuito in senso *antiorario*. [*Suggerimento*: il versore normale alla semicirconferenza, indicato in figura, ha l'espressione generale $\vec{n} = (0, cos(\omega t), sen(\omega t))$.]
b) Si scriva l'equazione differenziale che deve soddisfare la corrente $I(t)$, orientata come in figura, nell'intervallo $0 < t < \pi/\omega$ e si determini il valore della sua derivata $\dot{I}(0)$ immediatamente dopo la chiusura del circuito. Inizialmente la corrente circola in senso orario o antiorario?
c) Nota la corrente I_1 all'istante $t_1 = \pi/\omega$ si determini il suo valore I_2 all'istante $t_2 = 2\pi/\omega$.
d) Si determinino i valori delle derivate $\dot{I}_-$ e $\dot{I}_+$ della corrente immediatamente prima e dopo t_2.

Soluzioni

Problema 1

a)

$$\varphi(\vec{x}) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\ln(y^2+z^2) - \ln(x^2+z^2)\Big).$$

b)

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-x}{x^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2} - \frac{z}{x^2+z^2}\right).$$

c)

$$\vec{E}(x,y,0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 0\right).$$

d) Deve valere $\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = 0$, dove $\vec{B} = B\vec{u}_z$ con $B = \mu_0 NI/L$. Nel piano xy si ottiene

$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, 0\right) + (2v_0B, -v_0B, 0) = 0,$$

da cui $x_0 = \lambda/4\pi\varepsilon_0 v_0 B$, $y_0 = \lambda/2\pi\varepsilon_0 v_0 B$.
e) I piani $y = \pm x$ sono superfici equipotenziali. Vale infatti $\varphi(x, \pm x, z) = cost. = 0$.

Problema 2

a) Per $0 < t < \pi/\omega$ il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi(t) = \frac{\pi r^2}{2}\,\vec{n}(t)\cdot B\vec{u}_z = \frac{\pi r^2 B sen(\omega t)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\frac{\pi r^2 \omega B cos(\omega t)}{2}.$$

b) Vale

$$\varepsilon = L\dot{I} + RI.$$

Visto che la corrente varia in modo continuo si ha $I(0) = 0$ e dunque

$$\dot{I}(0) = \frac{\varepsilon(0)}{L} = -\frac{\pi r^2\omega B}{2L} < 0,$$

sicché inizialmente la corrente circola in senso *orario*.
c) Nell'intervallo $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ si ha $\varepsilon(t) = 0$ e l'equazione del circuito è $L\dot{I} + RI = 0$, con soluzione

$$I(t) = I_1 e^{-(t-t_1)R/L} \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = I(t_2) = I_1 e^{-\pi R/\omega L}.$$

d)

$$\dot{I}_- = \dot{I}(t_2) = -\frac{RI_1}{L}\,e^{-\pi R/\omega L}, \qquad \dot{I}_+ = \frac{\varepsilon(2\pi/\omega) - RI_2}{L} = -\frac{\pi r^2\omega B}{2L} - \frac{RI_1}{L}e^{-\pi R/\omega L}.$$