Primo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 13/11/2015

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Su una palla di raggio R centrata nell'origine è distribuita una carica Q con densità di carica di *volume* $\rho(r) = b/r$, dove r indica la distanza dall'origine e b è una costante.

a) Si determini l'unità di misura della costante b e la si esprima in termini di Q ed R. *Suggerimento*: in coordinate polari l'elemento di volume assume la forma $d^3x = r^2 dr d\Omega = r^2 sen\vartheta d\vartheta d\varphi dr$.

b) Si determini il modulo del campo elettrico $E(r)$ nelle regioni $r < R$ ed $r > R$, esprimendolo in termini di Q ed R.

c) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ nelle regioni $r < R$ ed $r > R$ soddisfacente alla condizione $\varphi(0) = 0$ e se ne tracci qualitativamente il grafico. Quanto vale in questo caso $\varphi(\infty)$?

d) Si supponga che a un certo istante la carica della palla venga liberata, distribuendosi in modo uniforme sul suo bordo. Si determini il lavoro L svolto dal campo elettrico durante la ridistribuzione, specificando se $L > 0$ o $L < 0$.

Problema B

Su tre biglie conduttrici isolate di raggi $r_1 = R$, $r_2 = R$ e $r_3 = 2R$, centrate nei vertici di un triangolo equilatero di lato a con centro l'origine, sono depositate rispettivamente le cariche Q, $5Q$ e $-2Q$. Si supponga che sia $a \gg R$.

a) Si determini l'energia elettrostatica U_e totale. *Suggerimento*: si ricordi la relazione

$$\int E^2 d^3x = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, \varphi \, d^3x.$$

b) A un certo istante si collegano le biglie attraverso tre sottili fili conduttori e si attende che si stabilisca l'equilibrio. Si determinino le cariche Q_1, Q_2 e Q_3 presenti sulle biglie dopo il collegamento.

c) Si determini l'energia $\mathcal{E}$ dissipata durante il collegamento.

d) Una particella di prova di carica q e massa m passa per il punto $P_1 = (3b, 4b, 0)$ con velocità scalare v_1 e successivamente per il punto $P_2 = (0, b, \sqrt{3}b)$ con velocità scalare v_2, con $b \gg a$. Conoscendo la somma $S = v_1 + v_2$ si determini la differenza $D = v_2 - v_1$. *Suggerimento*: si usi la conservazione dell'energia meccanica. Il valore di D è sensibile al fatto che le biglie siano collegate o meno tra di loro?

Primo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 13/11/2015

Teoria

Si risponda a <u>un</u> quesito del Gruppo 1 e a <u>un</u> quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si consideri un conduttore con carica totale Q in assenza di campo elettrico esterno. Si dimostri che il rapporto $Q/(\varphi_0 - \varphi_\infty)$ è costante, dove φ_0 e φ_∞ sono rispettivamente il potenziale del conduttore e il potenziale all'infinito. Si dimostri che, nota Q, la distribuzione superficiale di carica $\sigma(S)$ del conduttore è univocamente determinata.

1b) Si definisca il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ di un sistema di cariche puntiformi e si derivi l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ a grandi distanze dal sistema in termini di $\vec{p}$ e della carica totale Q. Si motivino le approssimazioni fatte, specificando in particolare l'ordine dell'errore del risultato finale.

1c) Si derivi l'espressione della *densità di energia* $w_e(\vec{x})$ del campo elettrico a partire dall'espressione dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi. Qual è il legame tra il lavoro compiuto dal campo elettrico e l'energia elettrostatica U_e di un sistema? Si derivi per un sistema di N conduttori un'espressione per U_e che coinvolga solo le loro cariche Q_j e i loro potenziali φ_j, $j = 1, \cdots, N$.

Gruppo 2

2a) Come si definisce il momento di dipolo magnetico $\vec{\mu}$ associato a una generica densità di corrente $\vec{j}$? Si determini l'espressione di $\vec{\mu}$ per una spira percorsa da corrente. Si determini il momento $\vec{M}$ delle forze magnetiche agenti su una piccola spira percorsa da corrente in termini di $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$, motivando le approssimazioni fatte.

2b) Si dimostri che la legge oraria $\vec{x}(t)$ di una particella carica in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$ corrisponde a un'*elica* a passo costante. Si determini la legge oraria $\vec{x}(t)$ soddisfacente alle condizioni iniziali $\vec{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\vec{v}(0) = (0, W, V)$. Quanto vale in questo caso il passo dell'elica?

2c) Si dia la definizione della densità di corrente $\vec{j}$ e si derivi il legame esistente tra le grandezze $\vec{j}$, $\vec{v}$ e ρ. Si scriva e si dimostri l'*equazione di continuità* per la carica elettrica. Si spieghino i concetti di conservazione locale e globale della carica elettrica.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Da $[\rho] = C/m^3$ segue $[b] = [\rho][r] = C/m^2$. Si ha

$$Q = \int_{r<R} \rho(r)\, d^3x = 4\pi \int_0^R \rho(r)\, r^2 dr = 2\pi b R^2 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{Q}{2\pi R^2}.$$

b) Per $r < R$ dal teorema di Gauss si ottiene $4\pi r^2 E(r) = Q(r)/\varepsilon_0 = \int_{r'<r} \rho(r') d^3x'/\varepsilon_0 = 2\pi b r^2/\varepsilon_0$, da cui

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{b}{2\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, & \text{per } r < R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{per } r > R. \end{cases}$$

c)

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, & \text{per } r < R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{R}\right), & \text{per } r > R, \end{cases}$$

sicché $\varphi(\infty) = -Q/2\pi\varepsilon_0 R$.

d) Durante la ridistribuzione il campo elettrico cambia solo nella regione $r < R$, sicché da $L = -(U_e^f - U_e^i)$ e $U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, d^3x$ si ottiene (si noti che all'interno della palla $E(r)$ è costante)

$$L = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_i^2\, d^3x - \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_f^2\, d^3x = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R E^2(r)\, d^3x = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\frac{4\pi R^3}{3}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{24\pi\varepsilon_0 R} > 0.$$

Problema B

a) Visto che $a \gg R$ le distribuzioni di carica sulle biglie possono essere assunte isotrope, sicché i loro potenziali valgono rispettivamente

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \qquad \varphi_2 = \frac{5Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \qquad \varphi_3 = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)}.$$

Vale allora

$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho\, \varphi\, d^3x = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3 Q_j \varphi_j = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q^2}{R} + \frac{(5Q)^2}{R} + \frac{(-2Q)^2}{2R}\right) = \frac{7Q^2}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

b) Uguagliando i potenziali delle biglie, $Q_1/R = Q_2/R = Q_3/2R$, e usando la conservazione della carica, ovvero $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 4Q$, si ottiene $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q$, $Q_3 = 2Q$.

c) L'energia elettrostatica dopo il collegamento vale ($Q_T = 4Q$, $\varphi_f = Q/4\pi\varepsilon_0 R$)

$$U_e' = \frac{1}{2}\, Q_T\, \varphi_f = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 R}, \quad \text{sicché} \quad \mathcal{E} = L = -(U_e' - U_e) = \frac{3Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

d) A grandi distanze il campo elettrico equivale a un campo coulombiano generato da una carica $4Q$ posta nell'origine, con potenziale $\varphi(r) = Q/\pi\varepsilon_0 r$, sicché la conservazione dell'energia meccanica $q\varphi(P_2) + mv_2^2/2 = q\varphi(P_1) + mv_1^2/2$ fornisce

$$\frac{1}{2}\, m\, DS = \frac{1}{2}\, m(v_2^2 - v_1^2) = q\,(\varphi(5b) - \varphi(2b)) = \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{5b} - \frac{1}{2b}\right) = -\frac{3qQ}{10\pi\varepsilon_0 b} \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{3qQ}{5\pi\varepsilon_0 bmS}.$$

A grandi distanze dalle biglie, $b \gg a$, il campo elettrico è indipendente dalla distribuzione specifica delle cariche sulle tre biglie, sicché anche D non ne dipende.