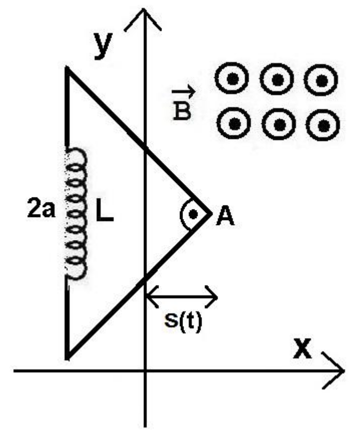
Secondo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 15/01/2016

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Una spira conduttrice della forma di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa $2a$, massa m, induttanza L e resistenza trascurabile è vincolata a muoversi nel piano xy mantenendo l'ipotenusa parallela all'asse y. Nella regione delle x positive vi è un campo magnetico $\vec{B} = B\vec{u}_z$ costante e uniforme, $B > 0$, mentre nella regione delle x negative il campo magnetico è nullo. Sia $s(t)$ la distanza del vertice A della spira dall'asse y all'istante t, vedi figura. Si considerino i dati iniziali $s(0) = 0$ e $\dot{s}(0) = v_0 > 0$ e si assuma che per $t < 0$ nella spira non circoli corrente. Nei quesiti a), b) e c) si assuma che sia $s < a$, ovvero che l'ipotenusa si trovi nella regione delle x negative.



a) Si determini la corrente $I(s)$ circolante nella spira come funzione di s, specificando se cirola in senso orario o antiorario. *Suggerimento*: si ponga l'equazione del circuito nella forma $df/dt = 0$, per un'opportuna funzione f.

b) Si dimostri che s soddisfa un'equazione differenziale della forma

$$\ddot{s} = b\, s^3, \tag{1}$$

determinando il valore della costante b.

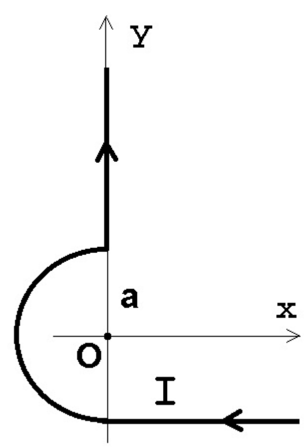
c) Si determini la velocità $v(s)$ della spira come funzione di s. *Suggerimento*: si risolva l'equazione (1) usando la relazione $v = \frac{ds}{dt}$, sicché $\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$, e ricorrendo al *metodo della separazione delle variabili.*

d) Qual è il minimo valore v_m di v_0 per cui l'ipotenusa a un certo istante t^* supera l'asse y?

e) **Facoltativo:** supponendo $v_0 > v_m$ si determinino la corrente $I(t)$ e la posizione $s(t)$ a un generico istante $t > t^*$.

Problema B

Un circuito composto da una semicirconferenza di raggio a con centro l'origine O e da due semirette, parallele rispettivamente agli assi x e y, è percorso da una corrente I con il verso indicato in figura.



a) Si determini il campo magnetico $\vec{B}_O$ nell'origine.

b) Si consideri d'ora in avanti il circuito nel limite in cui $a \to 0$, nel qual caso risulta composto dai semiassi delle x e delle y positive. Si determini il campo magnetico $\vec{B}(z)$ in un generico punto del semiasse delle z positive.

c) Si determini la direzione di equilibrio stabile $\vec{n}_s$ dell'ago di una bussola che si trova nel punto $P = (0, 0, b)$, $b > 0$, ed è appoggiata al piano yz. *Suggerimento*: in tal caso l'ago della bussola appartiene sempre al piano yz.

d) Conoscendo il modulo μ del momento magnetico dell'ago si determini il lavoro meccanico L svolto dal campo magnetico per ruotare l'ago dalla direzione $\vec{n}_s$ alla direzione $\vec{n}_f = (0, -1, 0)$, specificando se $L > 0$ o $L < 0$.

Secono compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica – 15/01/2016

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Assumendo che le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali da un sistema di riferimento inerziale a un altro siano *lineari*, si dimostri il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, specificando i *postulati della Relatività* che di volta in volta si usano. Come si definisce il *quadrimomento* di una particella? Qual è la velocità di una particella priva di massa? Si motivi la risposta.

1b) Si scrivano le *equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica* in forma covariante a vista. Si verifichi che l'equazione di Lorentz in forma covariante a vista è equivalente all'equazione di Lorentz tridimensionale, opportunamente modificata. Qual è il significato della quarta componente dell'equazione di Lorentz in forma covariante a vista? Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione del campo elettrico da un sistema di riferimento inerziale a un altro?

Gruppo 2

2a) Come si definisce l'induttanza L di un circuito? Si derivi la formula per l'energia magnetica U_L immagazzinata in un circuito con induttanza L percorso da corrente I. Applicando tale formula a un solenoide ideale si derivi l'espressione della densità di energia w_m associata al campo magnetico. In che modo si conferisce a tale espressione - assieme all'espressione analoga della densità di energia elettrostatica - validità *universale*? In generale l'energia del campo elettromagnetico in un volume V *non* contenente cariche si conserva nel tempo? Si motivi la risposta.

2b) Si dica per quale motivo l'*equazione di Ampere* nel caso di campi variabili nel tempo deve essere modificata. Come si collega tale modifica con le proprietà delle equazioni di Maxwell, viste come equazioni relativistiche? Quale nuovo fenomeno fisico viene introdotto dall'*equazione di Ampere-Maxwell*? Si illustri la consistenza della presenza della *corrente di spostamento* durante il processo di carica di un condensatore.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Orientando la spira in senso orario si ha $\Phi = -s^2 B$, sicché $\varepsilon = -\dot{\Phi} = 2svB$. Indicando con I la corrente con verso orario l'equazione del circuito diventa allora $\varepsilon = LdI/dt$, ovvero $d(Bs^2 - LI)/dt = 0$. Viste le condizioni iniziali $I(0) = s(0) = 0$ si ottiene la corrente

$$I(s) = \frac{Bs^2}{L} > 0,$$

circolante dunque in senso *orario*, in accordo con la *legge di Lenz*.

b) I due tratti di spira che si trovano nella regione $x > 0$ sono soggetti a forze magnetiche, secondo la seconda legge elementare di Laplace, la cui somma vettoriale fa $\vec{F} = -2IBs\vec{u}_x = -(2B^2s^3/L)\vec{u}_x$. L'equazione di Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ fornisce allora

$$\ddot{s} = b\,s^3, \qquad b = -\frac{2B^2}{mL}.$$

c)

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 - \frac{B^2 s^4}{mL}}.$$

d) Il valore $v(a)$ deve essere *reale* e quindi deve valere $v_0 \geq a^2 B/\sqrt{mL} = v_m$.

e) Per $t > t^*$ si ha

$$I(t) = \frac{Ba^2}{L}, \qquad s(t) = a + (t - t^*)v(a) = a + (t - t^*)\sqrt{v_0^2 - \frac{B^2 a^4}{mL}}.$$

Per $t > t^*$ la corrente resta diversa da zero poiché in un'induttanza essa non può variare con discontinuità. Ciononostante, essendo $\vec{B}$ uniforme la forza totale agente sulla spira è nulla.

Problema B

a) In base alla prima legge elementare di Laplace la semiretta parallela all'asse y crea campo magnetico nullo in O, mentre i contributi della semicirconferenza e della semiretta parallela all'asse x sono rispettivamente $\vec{B}_{sc} = -(\mu_0 I/4\pi a^2)(\pi a)\vec{u}_z$ e $\vec{B}_{sr} = -(\mu_0 I/4\pi a)\vec{u}_z$. Si trova quindi

$$\vec{B}_O = \vec{B}_{sc} + \vec{B}_{sr} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,(1 + \pi)\vec{u}_z.$$

b) Sommando vettorialmente i contributi di due *mezzi* fili si trova

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\,(1, 1, 0).$$

c) Essendo il momento magnetico dell'ago $\vec{\mu} = \mu\vec{n} = \mu(0, n_y, n_z)$, l'energia potenziale $U_m = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}(b) = -(\mu\mu_0 I/4\pi b)n_y$ è minima per $n_y = 1$. Si trova quindi

$$\vec{n}_s = (0, 1, 0).$$

d)

$$L = -\Delta U_m = \mu\left(\vec{n}_f \cdot \vec{B}(b) - \vec{n}_s \cdot \vec{B}(b)\right) = -\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b} < 0.$$