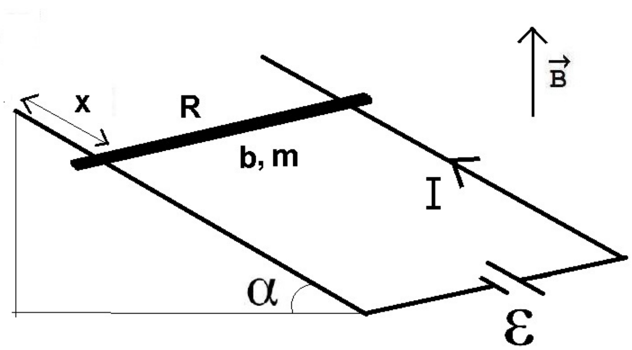
Secondo compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 16/01/2015

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Una sbarra metallica orizzontale di massa m, lunghezza b e resistenza R scivola senza attrito lungo due guide conduttrici parallele distanti b, inclinate di un angolo α rispetto al piano orizzontale. Le guide, di resistenza trascurabile, sono collegate a un generatore di f.e.m. costante $\mathcal{E} > 0$. Il sistema è immerso in un campo magnetico $\vec{B} = B\vec{u}$ costante e uniforme diretto lungo la verticale ascendente e si trova in presenza della forza peso $m\vec{g}$. Si considerino note le grandezze B, m, g, b, R, α ed $\mathcal{E}$. La posizione della sbarra è individuata dalla coordinata $x(t)$ indicata in figura, sicché la sua velocità lungo il piano inclinato discendente è $v(t) = \dot{x}(t)$. All'istante $t = 0$ si abbia $v(0) = 0$.



a) Si esprima la corrente $I(t)$, con il verso indicato in figura, in termini di $v(t)$.
b) Si scriva l'equazione differenziale a cui deve obbedire la funzione $v(t)$.
c) Si determinino i valori asintotici v_∞ e I_∞ della velocità e della corrente per tempi molto grandi. Se vale $\mathcal{E} = 2mgR(\tan\alpha)/bB$, asintoticamente la sbarra scende o sale?
d) **Facoltativo:** si ricavi esplicitamente la funzione $v(t)$, esprimendola in termini di v_∞ e del tempo caratteristico τ del fenomeno.

Problema B

Si considerino due superfici cilindriche infinitamente estese coassiali con l'asse z di raggi rispettivamente R e $2R$. Sulla superficie interna scorre una corrente con densità superficiale costante k nella direzione delle z *decrescenti* e sulla superficie esterna scorre una corrente con densità superficiale costante $2k$ nella direzione delle z *crescenti*. Si introduca la coordinata radiale cilindrica $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
a) Si determinino modulo, direzione e verso del campo magnetico in tutto lo spazio, distinguendo le regioni $r < R$, $R < r < 2R$, $2R < r$.
b) Una particella di carica q e massa m compie un moto pressoché circolare di periodo T e raggio molto minore di R, con centro nel punto $P = (3L, 4L, 0)$, con $L \gg R$. Noti q, m, T, R ed L, e supponendo che la forza peso sia trascurabile, si determini k.
c) Quanto deve valere il momento magnetico $\vec{\mu}$ - in modulo e direzione - di una spira circolare percorsa da corrente, centrata nell'origine e di raggio $R/5$, affinché il campo magnetico *totale* in P sia nullo? *Suggerimento*: si scelga $\mu^z = 0$ e si ricordi l'espressione del *campo di dipolo* ($L \gg R$)

$$\vec{B}_d(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{\mu}\right). \tag{1}$$

Secono compitino di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 16/01/2015

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si illustrino molto brevemente il significato e l'importanza del concetto della *covarianza a vista*. Si scrivano le *equazioni di Maxwell* e l'*equazione di continuità* per la carica elettrica in forma covariante a vista. Si verifichi che la *legge di Faraday* segue da tali equazioni. Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione del campo elettrico da un sistema di riferimento inerziale a un altro?

1b) Si spieghi il funzionamento del *betatrone* e si derivi il vincolo a cui deve soddisfare il campo magnetico. Si esprima l'energia cinetica massima ε_m che può raggiungere l'elettrone in termini del campo magnetico massimo B_m producibile lungo la traiettoria. Per quali valori delle grandezze fisiche coinvolte è corretto affrontare il problema usando l'equazione di Lorentz *non relativistica*?

Gruppo 2

2a) Assumendo noto che le equazioni di Maxwell implicano che $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soddisfano le equazioni delle onde, si derivi una base completa di soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Quali sono le caratteristiche principali degli elementi della base? Un generico campo elettromagnetico, soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto, è trasverso? Quali sono le osservazioni sperimentali che hanno portato Maxwell a identificare la luce come un fenomeno elettromagnetico? Cosa hanno invece dimostrato gli esperimenti di Hertz?

2b) Si scrivano le equazioni fondamentali della *magnetostatica* in forma differenziale e le si risolvano derivando per $\vec{B}$ una rappresentazione integrale in termini di $\vec{j}$, specificando il motivo per cui si può imporre la *gauge di Coulomb* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Si spieghi perché poli dello stesso tipo di due magneti si respingono, mentre un polo nord e un polo sud si attraggono (si veda la formula (1) del Problema B).

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Considerando come verso del circuito quello antiorario si ha $\Phi = b(L-x)B\, cos\alpha$, da cui $\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi} = bBv\, cos\alpha$ e quindi $I = (bBv\, cos\alpha + \mathcal{E})/R$.

b) Sostituendo questa espressione nell'equazione di Newton $m\dot{v} = -IbB\, cos\alpha + mg\, sen\alpha$ si trova

$$\dot{v} + \frac{(bB\, cos\alpha)^2}{mR} v = g\, sen\alpha - \frac{\mathcal{E} bB\, cos\alpha}{mR}. \tag{2}$$

c) Asintoticamente si ha $\dot{v} \to 0$, sicché l'equazione di Newton dà $I_\infty = mg\, tan\alpha/(bB)$. Dalla risposta al quesito a) si ottiene allora

$$v_\infty = \frac{mRg\, sen\alpha}{(bB\, cos\alpha)^2} - \frac{\mathcal{E}}{bB\, cos\alpha}.$$

Per $\mathcal{E} = 2mgR \tan\alpha/bB$, asintoticamente la sbarra sale in quanto

$$v_\infty = -\frac{mRg\, sen\alpha}{(bB\, cos\alpha)^2} < 0.$$

d) L'equazione (2) si può porre nella forma $\dot{v} + (v - v_\infty)/\tau = 0$ e quindi

$$v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau}), \qquad \tau = \frac{mR}{(bB\, cos\alpha)^2}.$$

Problema B

a) Usando il *teorema di Ampere* per il modulo del campo magnetico si trova

$$B = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{\mu_0 kR}{r}, & R < r < 2R, \\ \dfrac{3\mu_0 kR}{r}, & 2R < r. \end{cases}$$

b) $\omega = qB(P)/m = 2\pi/T$, $B(P) = 3\mu_0 kR/r$, $r = 5L$, da cui

$$k = \frac{10\pi mL}{3\mu_0 qTR}.$$

c) In P il campo magnetico dei due cilindri vale $\vec{B}(P) = (3\mu_0 kR/5L)\, \vec{u}_\varphi$, con $\vec{u}_\varphi = (-4/5, 3/5, 0)$. Ponendo $\vec{\mu} = \mu_\varphi \vec{u}_\varphi + \mu_r \vec{u}_r$, il campo magnetico di dipolo in P diventa

$$\vec{B}_d(P) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi(5L)^3}\, (2\mu_r \vec{u}_r - \mu_\varphi \vec{u}_\varphi).$$

Imponendo l'equazione $\vec{B}(P) + \vec{B}_d(P) = 0$ si trova allora $\mu_r = 0$ e

$$\vec{\mu} = 300\pi kRL^2\, \vec{u}_\varphi.$$