Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 17/11/2017

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Una distribuzione di carica a simmetria sferica con densità di *volume* uniforme $\rho > 0$ si trova confinata nel guscio sferico centrato nell'origine $(0, 0, 0)$ con raggi R e $2R$.

a) Si determini il modulo del campo elettrico $E(r)$ nelle regioni $r < R$, $R < r < 2R$, $2R < r$, dove $r = |\vec{x}|$, e se ne tracci qualitativamente il grafico.

b) Si supponga d'ora in avanti che vi sia anche una carica puntiforme Q fissata nel punto $A = (4R, 0, 0)$, tale che per $r \gg R$ il campo elettrico *totale* decresca come $1/r^3$. Si determini ρ in termini di R e Q.

c) A un certo istante una carica di prova passa per il punto $B = (L/\sqrt{2}, L/\sqrt{2}, 0)$, con $L \gg R$. Si determini il valore *numerico* del rapporto $f = a_y/a_x$ delle componenti y e x della sua accelerazione $\vec{a}$.

Suggerimento: può essere utile l'espressione del *campo di dipolo elettrico*

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\,\frac{(\vec{p}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{p}\right).$$

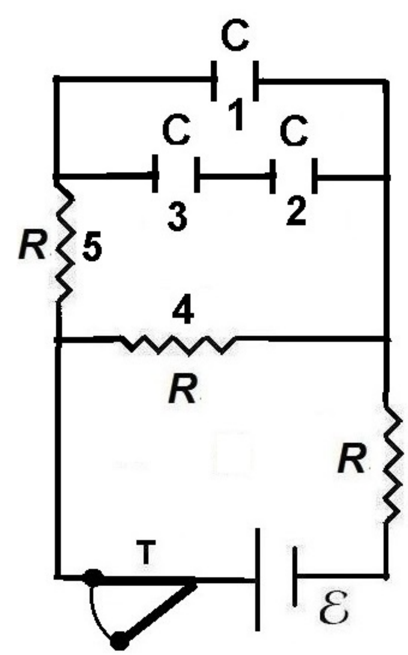
Problema B

Nel circuito in figura il valore di tutte le resistenze è R e la capacità di tutti i condensatori è C. Il generatore possiede una forza elettromotrice $\mathcal{E} > 0$. Inizialmente i condensatori sono scarichi e l'interruttore T è aperto. A un certo istante si chiude l'interruttore e si attende che il circuito vada a regime.

a) Si determinino, a regime, la corrente I_4^* che passa per la resistenza 4 e le cariche Q_1^*, Q_2^* e Q_3^* dei condensatori.

b) All'istante $t = 0$ si riapre l'interruttore T. Considerando un opportuno circuito equivalente si scriva l'equazione differenziale a cui deve obbedire per $t > 0$ la carica $Q(t) \equiv Q_1(t) + Q_2(t)$ presente complessivamente sui condensatori 1 e 2.

c) Si determini la corrente $I_5(t)$ passante per la resistenza 5 a un generico istante $t > 0$.



Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 17/11/2017

Teoria

Si risponda a <u>un</u> quesito del Gruppo 1 e a <u>un</u> quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si dimostri il *teorema di Gauss* a partire dalla *legge di Coulomb*. Si derivi il campo elettrico $\vec{E}(P)$ prodotto da una distribuzione di carica $\rho(r)$ *isotropa* attorno all'origine (0,0,0) e a supporto compatto, ovvero $\rho(r) = 0$ per $r > L$, nel punto $P = (L, L, 0)$.

1b) Si derivi l'espressione della *densità di energia* del campo elettrico $w_e(\vec{x})$ a partire dalla nota espressione dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche puntiformi. Si spieghi il legame esistente tra il lavoro compiuto dal campo elettrico e l'energia elettrostatica U_e di un sistema. Si determini l'energia elettrostatica $U_e(R, Q)$ di una distribuzione *superficiale* sferica uniforme di carica di raggio R e carica totale Q.

Gruppo 2

2a) Si dimostri che la legge oraria $\vec{r}(t)$ di una particella carica in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$ corrisponde a un'*elica* a passo costante. Si determini la legge oraria $\vec{r}(t)$ soddisfacente alle condizioni iniziali $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ e $\vec{v}(0) = (0, W, V)$. Quanto vale in questo caso il passo dell'elica?

2b) Si *derivino* le caratteristiche principali del campo elettrico, del potenziale e della distribuzione di carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico. In questo caso il campo elettrico è un campo vettoriale *continuo* in tutto $\mathbb{R}^3$? Si motivi la risposta. In che cosa consiste il fenomeno della *gabbia di Faraday* e come lo si dimostra?

Soluzione dei problemi

Problema A

a) La carica totale del guscio vale $Q_0 = \frac{4\pi}{3}\big((2R)^3 - R^3\big)\rho = 28\pi R^3\rho/3$. Per $r < R$ il campo è nullo e per $r > 2R$ vale $Q_0/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Per $R < r < 2R$ il teorema di Gauss fornisce

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{4\pi}{3}\,\big(r^3 - R^3\big)\rho, \qquad E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right).$$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & \text{per } r < R, \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R^3}{r^2}\right), & \text{per } R < r < 2R, \\ \dfrac{7\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & \text{per } 2R < r. \end{cases} \tag{1}$$

b) Deve valere $Q + Q_0 = 0$, quindi $\rho = -3Q/28\pi R^3$.

c) Il sistema possiede il momento di dipolo elettrico $\vec{p} = (4RQ, 0, 0)$. Visto che $L \gg R$, il campo elettrico nel punto $B = (L/\sqrt{2}, L/\sqrt{2}, 0)$ vale con buona approssimazione

$$\vec{E}(B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 L^3}\left(3\,\frac{2RQ\,(L, L, 0)}{L^2} - (4RQ, 0, 0)\right) = \frac{RQ}{2\pi\varepsilon_0 L^3}\,(1, 3, 0).$$

Dato che $\vec{a} = q\vec{E}(B)/m$ si trova $f = a_y/a_x = 3$.

Problema B

a) Dalla legge della maglia inferiore si trova $I_4^* = \mathcal{E}/2R$. La differenza di potenziale ai capi della resistenza 4 vale allora $V = I_4^* R = \mathcal{E}/2$, da cui segue $Q_1^* = CV = C\mathcal{E}/2$. La capacità equivalente dei condensatori 2 e 3 vale $C_{23} = C/2$, e quindi $Q_2^* = Q_3^* = VC_{23} = C\mathcal{E}/4$.

b) Dopo l'apertura dell'interruttore il circuito equivale a un circuito "RC", con capacità equivalente $\frac{3}{2}\,C$ e resistenza equivalente $2R$. La sua equazione è dunque $2R\dot{Q} + Q/(\frac{3}{2}\,C) = 0$, ovvero

$$\dot{Q} + \frac{Q}{3RC} = 0. \tag{2}$$

c) Il valore iniziale della carica è $Q(0) = Q_1^* + Q_2^* = \frac{3}{4}\,C\mathcal{E}$. La soluzione della (2) è dunque

$$Q(t) = Q(0)\,e^{-t/3RC}, \qquad I_5(t) = -\dot{Q}(t) = \frac{\mathcal{E}}{4R}\,e^{-t/3RC}.$$