Primo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 18/11/2016

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Si consideri un campo elettrico con componenti

$$\vec{E}(\vec{x}) = a\left(\frac{x}{r^2}, \frac{by}{r^2}, \frac{cz}{r^n}\right), \qquad r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

dove a, b, c ed n sono parametri reali.

a) Per quali valori di a, b, c ed n il campo $\vec{E}(\vec{x})$ costituisce un campo *elettrostatico*? *Suggerimento*: $\vec{E}$ deve soddisfare le *equazioni fondamentali dell'Elettrostatica*.

b) Si assuma d'ora in avanti che i parametri abbiano i valori determinati al quesito precedente e che il solo parametro noto sia a. Si determini il potenziale $\varphi(x,y,z)$ come funzione delle coordinate cartesiane, tale che $\varphi(L,L,L)=0$, $L>0$ essendo un parametro noto.

c) Si determini la carica elettrica Q_L contenuta in una palla centrata nell'origine di raggio L.

Problema B

Si considerino due superfici conduttrici cilindriche infinitamente estese e coassiali con l'asse z, di raggi rispettivamente b e $2b$. La densità *superficiale* di carica del cilindro interno vale $\sigma>0$ e quella del cilindro esterno $-\sigma/2$.

a) Si determinino il campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ e il potenziale $\varphi(r)$, funzione della variabile $r=\sqrt{x^2+y^2}$, nelle tre regioni $r<b$, $b<r<2b$, $2b<r$, imponendo la condizione $\varphi(b)=0$.

b) Si dica se la coppia di conduttori forma un *condensatore*, motivando la risposta, e in caso affermativo si determini la capacità C_H di una sua sezione di altezza H.

c) Una particella di prova di massa m e carica $q>0$ si trova inizialmente nel punto $P=(b,b,2b)$ con velocità vettoriale $(v_0,2v_0,v_0)$, con $v_0>0$. Trascurando la forza peso si determini l'energia cinetica T della particella nell'istante in cui impatta sul cilindro esterno.

Primo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 18/11/2016

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si derivi la rappresentazione integrale del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ in termini della densità di carica ρ, a partire dalla legge di Coulomb. Si verifichi esplicitamente che l'espressione ottenuta soddisfa l'identità $\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0$, ovvero la componente z dell'identità generale $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Si derivi l'andamento a grandi distanze di $\vec{E}(\vec{x})$ per una distribuzione di carica a supporto compatto.

1b) Si scrivano le equazioni fondamentali dell'Elettrostatica in forma differenziale e integrale e si dimostri che sotto opportune condizioni ammettono soluzione unica. In che cosa consiste l'importanza di questo risultato? Si determini la componente E_x del campo elettrico generato nel punto $(0, y, z)$ da una particella di carica q che si trova nel punto $(a, 0, b)$.

Gruppo 2

2a) Si derivi la *legge di Ohm* $V = RI$ per un resistore, usando il modello di urti successivi degli elettroni con il reticolo metallico. Cosa causa il fenomeno noto come *effetto Joule* in un resistore? Si derivi l'espressione della potenza w_J dissipata per tale via.

2b) Si dia la definizione della densità di corrente $\vec{j}$ e si derivi il legame esistente tra le grandezze $\vec{j}$, $\vec{v}$ e ρ. Si dimostri l'*equazione di continuità* per la carica elettrica. Si spieghino i concetti di conservazione *locale* e *globale* della carica.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Dall'equazione $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ si trova $b = c = 1$, $n = 2$, a arbitrario, sicché

$$\vec{E}(\vec{x}) = a \, \frac{\vec{x}}{r^2}.$$

b) Visto che il campo è radiale l'equazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ si riduce a $E_r = a/r = -\partial\varphi(r)/\partial r$, sicché $\varphi = -a \ln r + k$. Imponendo la condizione al bordo si trova poi $k = a \ln(\sqrt{3}L)$, sicché

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{a}{2} \, \ln \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3L^2}.$$

c) Dal teorema di Gauss si ha

$$Q_L = \varepsilon_0 \int_{r=L} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = a\varepsilon_0 \int_{r=L} \frac{\vec{x}}{r^2} \cdot \vec{n} \, r^2 d\Omega = 4\pi a \varepsilon_0 L.$$

Alternativamente si può calcolare la densità di carica attraverso $\rho(r) = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = a\varepsilon_0/r^2$ e usare poi la definizione $Q_L = \int_{r<L} \rho(r) \, d^3x$.

Problema B

a) Dal teorema di Gauss si trova che il campo elettrico è nullo per $r < b$ e $r > 2b$, mentre nell'intercapedine $b < r < 2b$ (la sua componente radiale clindrica) vale $E = \sigma b/\varepsilon_0 r$. Da $E(r) = -\partial\varphi(r)/\partial r$ e dalla condizione $\varphi(b) = 0$ segue allora, tenendo conto della continuità,

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & \text{per } b < r, \\ -\dfrac{\sigma b}{\varepsilon_0} \ln \dfrac{r}{b}, & \text{per } b < r < 2b, \\ -\dfrac{\sigma b}{\varepsilon_0} \ln 2, & \text{per } 2b < r. \end{cases} \tag{1}$$

b) Visto che tutte le linee di campo partono dal conduttore interno e terminano su quello esterno, la coppia di conduttori costituisce un condensatore. Per la (1) la differenza di potenziale tra i due condensatori vale $\Delta\varphi = \varphi(b) - \varphi(2b) = \sigma b \ln 2/\varepsilon_0$, e la carica dei due cilindri di altezza H in modulo vale $Q = (2\pi b)H\sigma$, sicchè $C_H = Q/\Delta\varphi = 2\pi H \varepsilon_0 / \ln 2$.

c) Il punto P ha coordinata radiale $r = \sqrt{2}b$, e appartiene quindi al intercapedine, mentre il punto d'impatto ha coordinata radiale $r = 2b$. Dalla conservazione dell'energia meccanica $\varepsilon = mv^2/2 + q\varphi(r)$ si ottiene allora

$$\frac{1}{2} \, m \left(6v_0^2\right) - \frac{q\sigma b}{\varepsilon_0} \, \ln \sqrt{2} = T - \frac{q\sigma b}{\varepsilon_0} \, \ln 2 \quad \Rightarrow \quad T = 3mv_0^2 + \frac{q\sigma b}{\varepsilon_0} \ln \sqrt{2}.$$