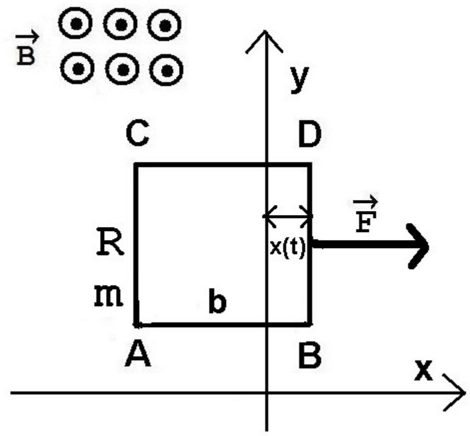
Secondo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 20/01/2017

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema 1

Una spira conduttrice quadrata $ABDC$ di lato b, massa m e resistenza R è vincolata a muoversi nel piano xy, mantenendo i lati sempre paralleli agli assi x e y. Nella regione di spazio delle x negative vi è un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, parallelo e concorde con l'asse z, mentre nella regione delle x positive non vi è nessun campo. La spira è sottoposta a una forza esterna costante $\vec{F} = F\vec{u}_x$, con $F > 0$. Si indichi con $x(t)$ la distanza del lato DB dall'asse y, vedi figura. Si assumana i dati iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.



a) Si determini la corrente I_0 circolante nella spira a un istante immediatamente successivo a $t = 0$, specificando se circola in senso *orario* o *antiorario.*

b) Si determini il valore F_0 di F per cui a un istante immediatamente successivo a $t = 0$ l'accelerazione della spira si annulla.

c) Considerando F generico si determini la velocità $v(t)$ della spira per tempi $t > 0$ tali che $x(t) < b$.

d) Sia $t^* > 0$ un istante tale che $x(t^*) < b$. Si considerino noti il lavoro L^* svolto da $\vec{F}$ tra gli istanti $t = 0$ e $t = t^*$ e l'energia $\mathcal{E}^* > 0$ dissipata nella spira per effetto Joule nello stesso intervallo di tempo. Che relazione intercorre tra $\mathcal{E}^*$ ed L^*? Si motivi la risposta.

Problema 2

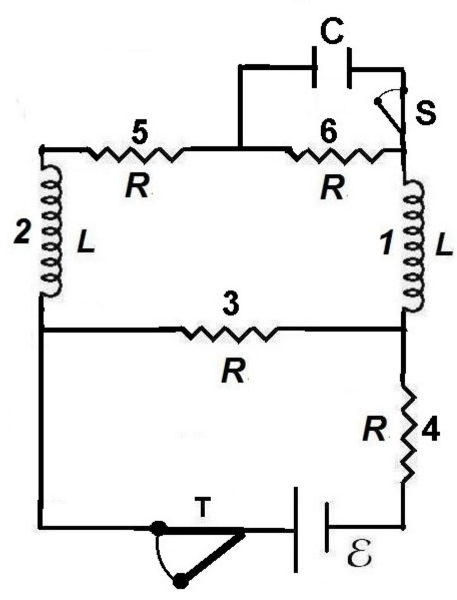
Nel circuito in figura il valore di tutte le resistenze è R, quello delle induttanze è L e quello della capacità è C. Inizialmente gli interruttori S e T sono chiusi e il circuito si trova a regime.

a) Si determini la corrente I_3 che attraversa la resistenza 3.

b) Si determini l'energia U_1 immagazzinata nell'induttanza 1.

c) Si determini la carica Q del condensatore.

d) A un certo istante si apre l'interruttore S e successivamente, all'istante $t = 0$, si apre anche l'interruttore T. Si determinino la corrente I^* che passa per l'induttanza 2 all'istante $t^* = L/R$ e il tempo caratteristico τ del processo.



Secono compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 20/01/2017

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) In che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione dei tempi*? Si derivi questo fenomeno ricorrendo alle trasformazioni di Lorentz speciali e si descriva un esperimento che lo verifica nella realtà. Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione del campo magnetico da un sistema di riferimento inerziale a un altro?

1b) Si enuncino i *postulati della Relatività*, confrontandoli con quelli della Fisica Newtoniana. Si enunci il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, spiegando il modo in cui i diversi postulati intervengono nella sua dimostrazione (non sono richiesti i dettagli della dimostrazione). Da questo teorema si deduca che le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale a un altro sono *trasformazioni di Poincaré*.

Gruppo 2

2a) Si dia per noto che campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soggetti alle equazioni di Maxwell nel vuoto soddisfano l'equazione delle onde. Che conclusione se ne può trarre? Si derivino le principali caratteristiche dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ associati a una generica onda elettromagnetica monocromatica. Quale di queste caratteristiche ha giocato un ruolo fondamentale nella scoperta della Relatività? Si motivi la risposta.

2b) Si scrivano le equazioni fondamentali della *magnetostatica* in forma differenziale e le si risolvano derivando per $\vec{B}$ una rappresentazione integrale in termini di $\vec{j}$. Si specifichi il motivo per cui in tale derivazione si può imporre la *gauge di Coulomb* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Si spieghi perché poli dello stesso tipo di due magneti si respingono, mentre un polo nord e un polo sud si attraggono. Può essere utile fare riferimento alla formula

$$\vec{B}_d(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{|\vec{x}|^2} - \vec{\mu}\right).$$

Soluzione dei problemi

Problema 1

a) Orientando la spira in senso antiorario si ha che per $t > 0$ la f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(Bb(b-x)\right) = bBv.$$

Per $t = 0^+$ la corrente è quindi

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{bBv_0}{R} > 0$$

e circola dunque in senso *antiorario*.

b) La forza magnetica agente sulla spira è $\vec{F}_m = -bBI\vec{u}_x$ (contribuisce solo il lato CA). Da $F_0 - bBI_0 = 0$ segue quindi

$$F_0 = bBI_0 = \frac{(bB)^2 v_0}{R}.$$

c) Visto che $I = \mathcal{E}/R = bBv/R$ ed $F_m = -bBI = -(bB)^2 v/R$ l'equazione di Newton fornisce

$$m\dot{v} = F_m + F = -\frac{(bB)^2}{R}\,v + F \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{FR}{(bB)^2} + \left(v_0 - \frac{FR}{(bB)^2}\right) e^{-t/\tau},$$

dove $\tau = mR/(bB)^2$.

d) Il lavoro compiuto dalla forza esterna si dissipa in parte in calore e in parte causa una variazione dell'energia cinetica della spira: $L^* = \mathcal{E}^* + \frac{1}{2}\,mv^2(t^*) - \frac{1}{2}\,mv_0^2$.

Problema 2

a) La resistenza equivalente R_e del circuito complessivo si ricava da $1/(2R) + 1/R = 1/R_0$ e $R_e = R_0 + R = 5R/3$. Indicando le correnti passanti per i diversi elementi con I_n si ottiene allora $I_4 = \mathcal{E}/R_e = 3\mathcal{E}/5R$. Dalla legge delle maglie $\mathcal{E} = RI_3 + RI_4$ si trova poi

$$I_3 = \frac{2\mathcal{E}}{5R}.$$

b) Da $I_1 = I_4 - I_3 = \mathcal{E}/5R$ risulta $U_1 = \frac{1}{2}\,LI_1^2 = \mathcal{E}^2 L/50R^2$.

c) $Q = (RI_6)C = (RI_1)C = \mathcal{E}C/5$.

d) Con S e T aperti l'equazione della maglia rimasta è

$$2L\,\frac{dI}{dt} + 3RI = 0,$$

con condizione iniziale $I(0) = I_1 = \mathcal{E}/5R$. La soluzione è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{5R}\,e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{2L}{3R}, \qquad I^* = \frac{\mathcal{E}}{5R}\,e^{-3/2}.$$