Compito di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 01/02/2017

Problema 1

Quattro fili conduttori infiniti paralleli all'asse z e passanti rispettivamente per i punti $P_1 = (a, a, 0)$, $P_2 = (-a, a, 0)$, $P_3(-a, -a, 0)$ e $P_4 = (a, -a, 0)$ sono percorsi dalle correnti I_1, I_2, I_3 e I_4, riferite al verso delle z *crescenti*.

a) Si determinino le componenti (B^x_O, B^y_O, B^z_O) del campo magnetico nell'origine O.

b) Assumendo che sia $I_2 = I_3 = I_1/2 < 0$ ed $I_4 = 2I_1$, si determini la direzione di equilibrio stabile $\vec{n}$ di un piccolo ago magnetico posto nel punto $A = (0, 0, l)$, specificando se $\vec{n}$ dipende dal *segno* di l.

c) Supponendo che valga $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 \equiv I$ si determini la forza magnetica $\vec{F}$ a cui è soggetto un tratto di lunghezza b del filo passante per P_3.

Problema 2

Si consideri una distribuzione di carica elettrostatica di *volume* a simmetria cilindrica infinitamente estesa e con asse l'asse z, con densità

$$\rho(r) = \begin{cases} ar, & \text{se } r < b, \\ 0, & \text{se } r > b, \end{cases}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed a e b sono constanti positive.

a) Si determini il modulo $E(r)$ del campo elettrico nelle regioni $r < b$ e $r > b$. Il campo vettoriale $\vec{E}(\vec{x})$ risultante è *continuo* in tutto $\mathbb{R}^3$?

b) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ in tutto lo spazio annullantesi nel punto $(0, b, b)$.

c) Si calcoli l'energia elettrostatica U_e contenuta in un cilindro di raggio $2b$ coassiale con l'asse z e di altezza L; non è necessario valutare esplicitamente eventuali integrali.

Soluzioni

Problema 1

a) Per la *legge di Ampere* i campi magnetici prodotti dai quattro fili nell'origine valgono

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(\sqrt{2}a)} \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}, \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(\sqrt{2}a)} \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(\sqrt{2}a)} \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}, \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I_4}{2\pi(\sqrt{2}a)} \frac{(-1,-1,0)}{\sqrt{2}},$$

da cui

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0}{4\pi a} (I_1 + I_2 - I_3 - I_4, -I_1 + I_2 + I_3 - I_4, 0) \,. \tag{1}$$

b) Il campo magnetico nel punto $A = (0,0,l)$ è uguale a $\vec{B}_O$, sicché per i valori delle correnti indicate nel testo la (1) dà per ogni l ($I_1 < 0$))

$$\vec{B}_A = \frac{\mu_0}{4\pi a} (-I_1, -2I_1, 0) \,, \qquad \vec{n} = (1,2,0)/\sqrt{5}.$$

c) Dalla *seconda legge elementare di Laplace* $d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$, sommando vettorialmente i contributi dei fili passanti per P_1, P_2 e P_4 si ottiene

$$\vec{F} = IbB_1^*(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) + IbB_2^*(0,1,0) + IbB_4^*(1,0,0),$$

dove i moduli dei campi magnetici creati in P_3 valgono

$$B_1^* = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2\sqrt{2}a)}, \quad B_2^* = B_4^* = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2a)}.$$

Si trova

$$\vec{F} = \frac{3\mu_0 b I^2}{8\pi a} (1,1,0).$$

Problema 2

a) Considerando $r < b$ e un cilindro di altezza L, dal teorema di Gauss si trova

$$Q(r) = \int_0^r \rho(r') L(2\pi r') dr' = 2\pi L a \frac{r^3}{3} = \varepsilon_0 \Phi(\vec{E}) = \varepsilon_0 2\pi r L E(r) \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{ar^2}{3\varepsilon_0}.$$

Procedendo allo stesso modo per $r > b$ si trova

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{ar^2}{3\varepsilon_0}, & \text{se } r < b, \\[2ex] \dfrac{ab^3}{3\varepsilon_0 r}, & \text{se } r > b, \end{cases}$$

corrispondente a un campo $\vec{E}(\vec{x})$ continuo in tutto $\mathbb{R}^3$, sebbene non differenziabile sulla superficie $r = b$.

b) Da $E = -\partial\varphi/\partial r$ si trova

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{a(r^3 - b^3)}{9\varepsilon_0}, & \text{se } r < b, \\[2ex] -\dfrac{ab^3}{3\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{r}{b}\right), & \text{se } r > b. \end{cases}$$

c)

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_0^b \left(\frac{ar^2}{3\varepsilon_0}\right)^2 (2\pi r L) dr + \int_b^{2b} \left(\frac{ab^3}{3\varepsilon_0 r}\right)^2 (2\pi r L) dr \right).$$