Compito di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 16/02/2017

Problema 1

Una sfera isolante di raggio R centrata nell'origine O è carica *superficialmente* con densità di carica $-\sigma < 0$. Nei vertici P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ di un quadrato di lato $b > 2R$ centrato in O si trovano quattro particelle identiche di massa m e carica $q > 0$.

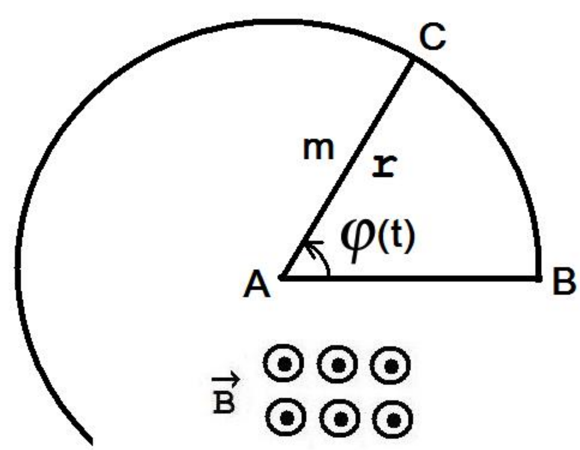
a) Si determini il lavoro totale L svolto dal campo elettrico per portare le quattro particelle dall'infinito nelle posizioni P_i in presenza della distribuzione sferica. Si discuta il *segno* di L in termini del rapporto positivo $R^2\sigma/q$.

b) A un certo istante si svincolano le quarto particelle e si osserva che iniziano a muoversi allontanandosi dalla sfera. Si determini il modulo v_∞ della loro velocità asintotica, stabilendo in particolare il legame quantitativo tra L e v_∞.

c) Quanto vale il modulo dell'accelerazione a delle particelle nell'istante in cui si trovano a una distanza b da O?

Problema 2

Un circuito ABC è composto da un segmento circolare BC di raggio r, da un raggio fisso AB e da un raggio mobile AC di massa m, la cui posizione è determinata dall'angolo $\varphi(t)$. Il circuito si trova in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B}$ ortogonale ad esso e con verso uscente. La resistenza per unità di lunghezza del filo che costituisce il circuito ABC vale k, ovvero la resistenza di un tratto di filo lungo Δl vale $\Delta R = k\Delta l$. Una forza esterna imprime al raggio AC la legge oraria $\varphi(t) = \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2$, con $\alpha > 0$. Si considerino solo istanti t tali che $0 \leq \varphi(t) < 2\pi$.



a) Si determinino la resistenza $R(t)$ e la corrente $I(t)$ come funzioni del tempo, specificando se quest'ultima circola in senso orario o antiorario.

b) Sfruttando la conservazione dell'energia si determini il lavoro L compiuto dalla forza esterna nell'intervallo temporale $[0, t]$ (non è necessario valutare esplicitamente eventuali integrali). *Suggerimento:* l'energia cinetica di un corpo rigido con asse fisso vale $T = \frac{1}{2}\,J\omega^2$ e il *momento d'inerzia* di un'asta di massa m e lunghezza l rispetto a un asse passante per un suo estremo e ortogonale all'asta vale $J = ml^2/3$.

c) Facoltativo. Si determini la potenza $W(t)$ fornita dalla forza esterna all'istante t.

Soluzioni

Problema 1

a) Vale $L = -\Delta U = -(U(P_i) - U(\infty)) = -U(P_i)$, dove $U(P_i)$ è l'energia potenziale delle quattro cariche in presenza del campo elettrico esterno generato dalla sfera. Risulta

$$U(P_i) = 4 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b} + 2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}b)} + 4 \cdot \frac{q(-4\pi R^2\sigma)}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,b\right)} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(4 + \sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,\frac{4\pi R^2\sigma}{q}\right).$$

Si ha quindi che $U(P_i) > 0$, e quindi $L < 0$, se il rapporto $R^2\sigma/q$ è un numero sufficientemente piccolo.

b) In tal caso, per la conservazione dell'energia meccanica totale, si deve avere

$$U(P_i) + 0 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2}\,mv_\infty^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{U(P_i)}{2m}} = \sqrt{\frac{-L}{2m}}.$$

c) Vale $\vec{a} = q\vec{E}/m$. Siccome il campo elettrico totale lungo le direzioni di moto è radiale, è sufficiente sommare le componenti radiali dei campi prodotti dalle altre tre particelle e dalla distribuzione sferica:

$$E_r = 2 \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}b)^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2b)^2} - \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 b^2}, \qquad a = \frac{q|E_r|}{m}.$$

Si noti che $E_r > 0 \Leftrightarrow U(P_i) > 0$.

Problema 2

a) Si ha

$$R(t) = k(2r + r\varphi(t)) = kr\left(2 + \frac{1}{2}\,\alpha t^2\right).$$

Orientando il circuito in senso orario risulta $\Phi = -Br^2\varphi(t)/2$ e quindi $\varepsilon = -\dot{\Phi} = Br^2\dot{\varphi}(t)/2 = Br^2\alpha t/2 > 0$. La corrente circola pertanto in senso *orario* e si ottiene

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Br\alpha t}{k(4 + \alpha t^2)}.$$

b) Il lavoro compiuto dalla forza esterna si trasforma in parte in energia cinetica dell'asta e in parte si dissipa per effetto Joule. All'istante t la velocità angolare dell'asta AC vale $\omega = \dot{\varphi}(t) = \alpha t$, sicché si ottiene ($J = mr^2/3$)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\,J\omega^2 + \int_0^t R(t')I^2(t')\,dt' = \frac{1}{6}\,mr^2\alpha^2t^2 + \frac{B^2r^3\alpha^2}{2k}\int_0^t \frac{t'^2\,dt'}{4 + \alpha t'^2} \\ &= \frac{1}{6}\,mr^2\alpha^2t^2 + \frac{B^2r^3\alpha}{2k}\left(t - \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,t\right)\right). \qquad (1) \end{aligned}$$

c)

$$W(t) = \frac{dL}{dt} = J\alpha^2 t + R(t)I^2(t).$$