Compito di "Fisica II" – Laurea in Matematica – 17/02/2015

Problema 1

Su un anello di raggio b centrato nell'origine e appartenente al piano xy si trova una distribuzione lineare di carica $-\lambda < 0$ e su un anello di raggio $2b$, sempre centrato nell'origine e appartenente al piano xy, si trova una distribuzione lineare di carica $2\lambda > 0$. In seguito si trascuri la forza peso.

a) Si determinino il potenziale $\varphi(z)$ e il campo elettrico $\vec{E}(z)$ sull'asse z.

b) Si determini il periodo T delle piccole oscillazioni attorno all'origine di una particella di carica $q > 0$ e massa m, vincolata all'asse z.

c) Si supponga che in presenza anche di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B}$, la particella di cui al quesito b) si trovi nel punto $P = (3R, 4R, 5R)$, con $R \gg b$, essendo inizialmente a riposo. Si osserva che la particella compie un moto *rettilineo* e che dopo aver percorso un tratto lungo $2b$ la sua velocità vale v in modulo. Noti b, R, q, m e v si determinino λ e il rapporto numerico B_y/B_z.

Problema 2

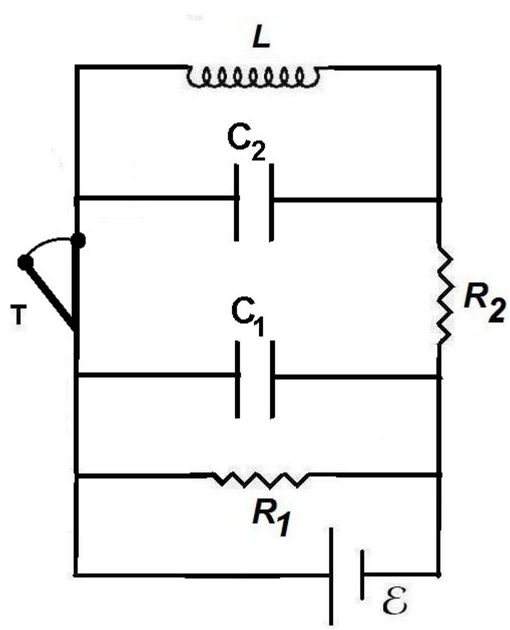
Nel circuito in figura, alimentato da un generatore di differenza di potenziale costante $\mathcal{E}$, inizialmente l'interruttore T è chiuso e il sistema è a regime.

a) Si determinino le correnti $I_{\mathcal{E}}$ e I_2 che a regime attraversano rispettivamente il generatore e la resistenza R_2.

b) Si determinino le cariche Q_1 e Q_2 presenti a regime rispettivamente sui condensatori C_1 e C_2.

c) All'istante $t = 0$ si apre l'interruttore T. Si determini la corrente $I(t)$ che circola a un generico istante $t > 0$ nella maglia contenente gli elementi L e C_2.

d) Si determini l'energia totale $U(t)$ immagazzinata a un generico istante $t > 0$ nella maglia di cui al quesito c).



Soluzioni

Problema 1

a) Il potenziale si ottiene sommando i potenziali dei due anelli, di carica totale rispettivamente $-2\pi b\lambda$ e $8\pi b\lambda$,

$$\varphi(z) = \frac{\lambda b}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}} + \frac{4}{\sqrt{z^2+4b^2}}\right), \quad E_z(z) = -\partial_z\varphi(z) = -\frac{\lambda bz}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(z^2+b^2)^{3/2}} - \frac{4}{(z^2+4b^2)^{3/2}}\right).$$

b) $m\ddot{z} = qE_z(z)$ da cui, al primo ordine in z,

$$\ddot{z} = -\frac{q\lambda}{4\varepsilon_0 mb^2}\,z \equiv -\omega^2 z, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi b\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\lambda}}.$$

c) Visto che il moto è rettilineo è necessariamente *radiale* e vale $\vec{B} \parallel \vec{E} \parallel (3R, 4R, 5R)$, sicché $B_y/B_z = \pm 4/5$. A grandi distanze si ha $\varphi(r) \approx Q/4\pi\varepsilon_0 r$, con $Q = -2\pi b\lambda + 8\pi b\lambda = 6\pi b\lambda$, e inizialmente $r = 5\sqrt{2}R$. Dalla conservazione dell'energia risulta allora

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\varphi(r) - q\varphi(r+2b) = \frac{Qqb}{2\pi\varepsilon_0 r(r+2b)} \approx \frac{Qqb}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{3q\lambda b^2}{50\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{25mv^2\varepsilon_0 R^2}{3qb^2}.$$

Problema 2

a) A regime correnti e cariche sono costanti. Visto che le resistenze R_1 e R_2 sono in parallelo si ha $I_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(R_1+R_2)/R_1R_2$ e $I_2 = \mathcal{E}/R_2$.
b) $Q_1 = \mathcal{E}C_1$ e $Q_2 = 0$.
c) L'equazione della maglia è $Q_2/C_2 + L\dot{I} = 0$, con $I = \dot{Q}_2$. Quindi $\ddot{Q}_2 + \omega^2 Q_2 = 0$, con $\omega = 1/\sqrt{LC_2}$. Viste le condizioni iniziali $Q_2(0) = 0$ e $\dot{Q}_2(0) = I(0) = I_2 = \mathcal{E}/R_2$ si ottiene

$$Q_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{\omega R_2}\,sen(\omega t), \qquad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_2}\,cos(\omega t).$$

d) Essendo la maglia conservativa si ha $U(t) = U(0) = L(I_2)^2/2 = L\mathcal{E}^2/2(R_2)^2$.