Compito di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 17/02/2016

Problema 1

Un circuito a forma di triangolo equilatero di lato a centrato nell'origine e appartenente al piano xy è percorso da una corrente I_c con verso *antiorario*.

a) Si determini il momento magnetico $\vec{\mu}_c$ del circuito.

b) Nel punto $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}L, \frac{\sqrt{2}}{2}L, 0\right)$, con $L \gg a$, si trova una spira circolare di raggio b, con $b \ll L$, percorsa da una corrente I_s. Si indichi con $\vec{n}$ il versore normale alla spira, orientato in modo concorde con I_s secondo la regola della mano destra. Ricordando l'espressione del *campo di dipolo magnetico*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right),$$

si determini la direzione di equilibrio *instabile* $\vec{n}_i$ della spira.

c) Liberando la spira dal punto P si osserva che essa si allontana da P portandosi a una distanza infinita dall'origine. Si supponga che durante il moto la sua direzione $\vec{n}_i$ rimanga bloccata. Si determini l'energia cinetica asintotica T_∞ della spira.

d) **Facoltativo:** si supponga che due particelle cariche identiche passino rispettivamente per i punti $P_1 = (0, L, 0)$ e $P_2 = (0, 0, L)$ con la stessa velocità vettoriale $\vec{v}$. Assumendo assente la spira circolare si determini il valore *numerico* del rapporto $f = |\vec{a}_1|/|\vec{a}_2|$ dei moduli delle accelerazioni delle due particelle.

Problema 2

Si consideri una distribuzione di *volume* uniforme di carica con carica totale $Q > 0$, confinata tra due sfere concentriche di raggi R e $2R$ centrate nell'origine.

a) Si determini il modulo del campo elettrico $E(r)$ nelle tre regioni $r < R$, $R < r < 2R$ e $2R < r$, dove r denota la distanza dall'origine.

b) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ nelle tre regioni di cui al quesito precedente tale che $\varphi(0) = 0$ e se ne tracci qualitativamente il grafico. Quanto vale $\varphi(\infty)$?

c) Nella distribuzione di carica lungo l'asse y è praticato un piccolo foro. Una particella di prova di carica $q < 0$ si trova inizialmente a riposo nella posizione $(0, 7R, 0)$. Si determini la sua energia cinetica massima T_m.

d) **Facoltativo:** si tracci qualitativamente il grafico della compenente $a_y(y)$ dell'accelerazione della particella di cui al quesito precedente, come funzione di y, considerando che y può assumere sia valori positivi che negativi.

Soluzioni

Problema 1

a) Il momento magnetico del circuito vale $\vec{\mu}_c = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 I_c \vec{u}_z \equiv \mu_c \vec{u}_z$.
b) Visto che $L \gg a$ e $L \gg b$, per valutare $\vec{B}(P)$ si può applicare l'espressione del campo di dipolo magnetico, che fornisce $\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi L^3} \vec{\mu}_c$, sicché $\vec{n}_i = \vec{u}_z$.
c) Durante il moto il momento magnetico della spira vale $\vec{\mu}_s = \pi b^2 I_s \vec{u}_z \equiv \mu_s \vec{u}_z$. Per la conservazione dell'energia la quantità $T + U_m$ rimane costante, sicché $0 + U_m(P) = T_\infty + 0$. Ne segue che

$$T_\infty = U_m(P) = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 \mu_s \mu_c}{4\pi L^3} = \frac{\sqrt{3} a^2 b^2 \mu_0 I_s I_c}{16 L^3}.$$

d) Si ha $\vec{B}(P_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi L^3} \vec{\mu}_c$ e $\vec{B}(P_2) = \frac{\mu_0 \mu_c}{2\pi L^3} \vec{u}_z$, sicché $\vec{B}(P_2) = -2\vec{B}(P_1)$. Dall'equazione di Lorentz $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$ si ottiene allora

$$f = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|\vec{v} \times \vec{B}(P_1)|}{|\vec{v} \times \vec{B}(P_2)|} = \frac{1}{2}\,.$$

Problema 2

a) Introducendo la densità di carica $\rho = Q/[\frac{4\pi}{3}\,((2R)^3 - R^3)] = 3Q/28\pi R^3$, usando il teorema di Gauss si trova

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{Q}{28\pi\varepsilon_0 R^3}\left(r - \dfrac{R^3}{r^2}\right), & R < r < 2R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & 2R < r. \end{cases}$$

b) Da $E(r) = -d\varphi(r)/dr$ e $\varphi(0) = 0$ si trova

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ -\dfrac{Q}{28\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{R^3}{r} - \dfrac{3R^2}{2}\right), & R < r < 2R, \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{9}{14R}\right), & 2R < r. \end{cases}$$

$\varphi(\infty) = -9Q/56\pi\varepsilon_0 R$.
c) Dalla conservazione dell'energia si ha $T(r) + q\varphi(r) = q\varphi(7R)$. Visto che $q < 0$, $T(r)$ è massima quando $\varphi(r)$ è massimo, ovvero per $r \in [0, R]$ dove $\varphi(r) = 0$. Si ha quindi $T_m = q\varphi(7R) = -qQ/8\pi\varepsilon_0 R > 0$.