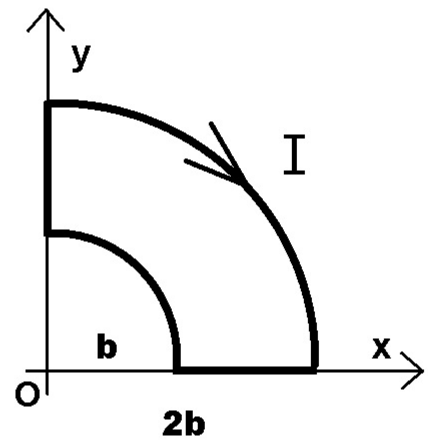
Compito di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 22/06/2015

Problema 1

In una spira conduttrice piana composta da due quarti di circonferenza concentrici, con centro l'origine O e appartenenti al piano xy, e da due tratti rettilinei (vedi figura) circola una corrente costante I in senso orario. I raggi delle circonferenze valgono rispettivamente b e $2b$.



a) Si determini il campo magnetico $\vec{B}_O$ nell'origine. *Suggerimento*: si ricordi la *prima legge elementare di Laplace*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3}.$$

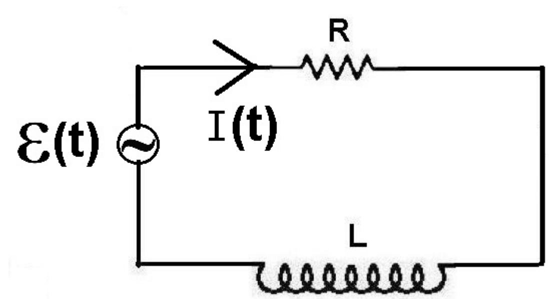
b) Si determinino i campi magnetici $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ nei punti $P_1 = (0,0,L)$ e $P_2 = (L,0,0)$ per $L \gg b$. Si ricordi l'espressione del *campo di dipolo magnetico*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right).$$

c) Si supponga che sia presente anche un campo elettrico costante e uniforme $\vec{E} = (0,0,E)$. Nell'istante $t = 0$ nel punto P_2 si trova una particella di carica q e massa m con velocità iniziale $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$. A un istante $t^* > 0$ la particella si trova nella posizione $(L, 0, z^*)$, avendo attraversato *una* volta il piano xz. Assumendo che nella regione in cui avviene il moto il campo magnetico sia praticamente uniforme, si determinino t^* e z^*.

Problema 2

Il circuito in figura è alimentato da un generatore di differenza di potenziale alternata di periodo $T = 2\pi/\omega$ e f.e.m. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 sen(\omega t)$.



a) Si scriva l'equazione differenziale a cui è soggetta la corrente $I(t)$ e se ne determini una soluzione particolare $I_p(t)$. *Suggerimento*: si usi l'ansatz $I_p(t) = Asen(\omega t + \varphi) = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$.

b) Si determini la soluzione $I(t)$ dell'equazione differenziale di cui al quesito precedente tale che $I(0) = 0$.

c) Si determini la media su un periodo dell'energia $\langle U_L \rangle$ immagazzinata nell'induttore, per un tempo $t \gg L/R$.

Soluzioni

Problema 1

a) Per la prima legge elementare di Laplace i tratti rettilinei non creano campo magnetico in O. L'arco interno crea un campo che in modulo vale $B_i = (\mu_0 I/4\pi)(\pi b/2)(1/b^2) = \mu_0 I/8b$ ed è diretto nel verso delle z crescenti, mentre l'arco esterno crea un campo che in modulo vale $B_e = \mu_0 I/16b$ ed è diretto nel verso delle z decrescenti. Si ha quindi

$$\vec{B}_O = (B_i - B_e)\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{16b}\,\vec{u}_z.$$

b) Il momento magnetico del circuito vale $\vec{\mu} = -\mu\,\vec{u}_z$, con $\mu = \frac{3}{4}\,\pi b^2 I$.

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0\mu}{2\pi L^3}\,\vec{u}_z, \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0\mu}{4\pi L^3}\,\vec{u}_z.$$

c) Nel piano xy il moto è circolare uniforme con velocità angolare $\omega = qB_2/m$, mentre lungo l'asse z è uniformemente accelerato. Visti i dati del problema la particella passa per il punto $(L, 0, z^*)$ dopo un periodo $T = 2\pi/\omega$. Vale quindi

$$t^* = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB_2} = \frac{32\pi m L^3}{3\mu_0 q b^2 I}, \qquad z^* = \frac{1}{2}\,at^{*2} = \frac{1}{2}\,\frac{qE}{m}\,t^{*2}.$$

Problema 2

a) L'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_0 sen(\omega t) = L\dot{I} + RI. \tag{1}$$

Sostituendovi l'ansatz $I_p = asen(\omega t) + bcos(\omega t)$ si ottiene

$$a = \frac{\mathcal{E}_0 R}{R^2 + (\omega L)^2}, \qquad b = -\frac{\mathcal{E}_0 \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

b) La soluzione generale della (1) è

$$I(t) = Ke^{-t/\tau} + asen(\omega t) + bcos(\omega t), \qquad \tau = \frac{L}{R},$$

con K costante arbitraria. Imponendo $I(0) = 0$ si ottiene $K = -b$ e dunque

$$I(t) = asen(\omega t) + b\left(cos(\omega t) - e^{-t/\tau}\right).$$

c) Per $t \gg \tau = L/R$ il transiente $-be^{-t/\tau}$ è tracurabile e si ha

$$\langle U_L \rangle = \frac{1}{2}\,L\left\langle I_p^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\,L\left\langle a^2 sen^2(\omega t) + b^2 cos^2(\omega t) + 2abcos(\omega t)sen(\omega t)\right\rangle = \frac{L}{4}\,(a^2 + b^2) = \frac{L\mathcal{E}_0^2/4}{R^2 + (\omega L)^2}.$$