Compito di Fisica II - Laurea in Matematica - 27/01/2015

Problema 1

Tra due piani infinitamente estesi ortogonali all'asse x, passanti rispettivamente per i punti $(L, 0, 0)$ e $(-L, 0, 0)$ con $L > 0$, si trova la distribuzione di *volume* di carica $\rho(x) = \alpha x^2$, $\alpha > 0$, che è dunque indipendente da y e z.

a) Si stabilisca l'unità di misura della costante α e si determini il campo elettrico in tutto lo spazio, distinguendo le regioni $|x| > L$ e $|x| < L$. *Suggerimento*: si applichi il teorema di Gauss a un'opportuna superficie cilindrica simmetrica sotto la riflessione $x \to -x$.

b) Si determini il potenziale $\varphi(\vec{x})$ in tutto lo spazio imponendo che si annulli nell'origine. Si tracci il grafico della funzione $g(x) \equiv \varphi(x, 0, 0)$.

c) Si determini la minima energia cinetica T_0 che una particella di carica $q > 0$ deve avere nel punto $A = (2L, 3L, 5L)$, affinché riesca a raggiungere il punto $C = (-2L, 3L, 5L)$ passando per un piccolo foro rettilineo praticato nella distribuzione di carica $\rho(x)$. Si trascuri la forza peso.

d) **Facoltativo:** si calcoli l'energia elettrostatica U contenuta in un cubo di lato L centrato nell'origine e con facce parallele ai piani coordinati.

Problema 2

Un spira circolare di raggio a appartenente al piano xy e con centro nell'origine è percorsa da una corrente I con verso antiorario. Un filo infinito passante per il punto $(0, 0, 2a)$ e con direzione $\vec{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ è percorso da una corrente $2I$, con verso concorde con $\vec{n}$.

a) Sapendo che il campo magnetico prodotto da una spira circolare di raggio a percorsa da corrente I, sul suo asse ha la forma

$$B_s(z) = \frac{\mu_0 I a^\beta}{2(z^2 + a^2)^\alpha},$$

si determinino i valori degli esponenti α e β, motivando le risposte. *Suggerimento*: si ricordi l'andamento asintotico del campo magnetico e si ricorrano ad argomenti dimensionali.

b) Si determinino le componenti $B^x(z)$, $B^y(z)$ e $B^z(z)$ del campo magnetico totale in un generico punto dell'asse z.

c) Nel punto $(0, 0, L)$ si trova un piccolo ago magnetico. Si scriva l'equazione a cui deve soddisfare L, affinché la direzione di equilibrio stabile dell'ago formi lo stesso angolo con l'asse z e con l'asse y. Si dica se vale $L > 2a$ oppure $L < 2a$.

Soluzioni

Problema 1

a) $[\alpha] = C/m^5$. Per motivi di simmetria il campo elettrico possiede solo componente x:

$$E^x = \begin{cases} \dfrac{\alpha L^3}{3\varepsilon_0}, & x > L, \\ \dfrac{\alpha x^3}{3\varepsilon_0}, & |x| < L, \\ -\dfrac{\alpha L^3}{3\varepsilon_0}, & x < -L. \end{cases}$$

b) Da $E^x = -\partial\varphi/\partial x$ si trova

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha L^3}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{3L}{4} - x\right), & x > L, \\ -\dfrac{\alpha x^4}{12\varepsilon_0}, & |x| < L, \\ \dfrac{\alpha L^3}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{3L}{4} + x\right), & x < -L. \end{cases}$$

c) Visto che φ è massimo in $x = 0$, dove si annulla, dalla conservazione dell'energia si deriva la condizione $T + q\varphi(2L, 3L, 5L) = T - 5q\alpha L^4/12\varepsilon_0 > 0$, da cui $T_0 = 5q\alpha L^4/12\varepsilon_0$.

d)

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\,L^2 \int_{-L/2}^{L/2} E^2(x)dx = \frac{\varepsilon_0}{2}\,L^2\left(\frac{\alpha}{3\varepsilon_0}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} x^6 dx = \frac{\alpha^2 L^9}{63\cdot 2^7\varepsilon_0}.$$

Problema 2

a) Visto che a grandi distanze il campo magnetico decresce come $1/|\vec{x}|^3$ si ha $\alpha = 3/2$. Per motivi dimensionali vale poi $\beta = 2$.

b)

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a^2(0,0,1)}{2(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0(2I)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)}{2\pi(z-2a)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{z-2a}, -\frac{\sqrt{2}}{z-2a}, \frac{\pi a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right).$$

c) All'equilibrio stabile si ha $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$. Affinché si abbia $\mu_y = \mu_z$ deve pertanto valere $B_y = B_z$, ovvero

$$-\frac{\sqrt{2}}{L-2a} = \frac{\pi a^2}{(L^2+a^2)^{3/2}}.$$

Si ha quindi $L < 2a$.