Compito di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 27/01/2016

Problema 1

Tra i punti $(0,0,0)$ e $(0,L,0)$, $L>0$, si trova una distribuzione *lineare* uniforme di carica, con carica totale $Q>0$.

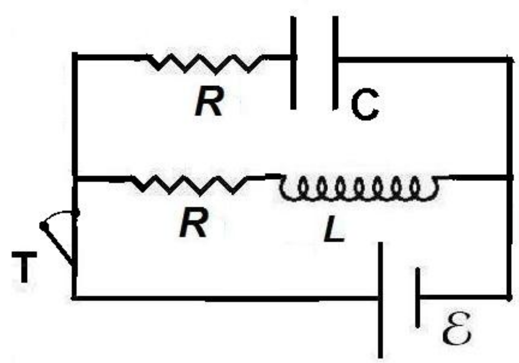
a) Si determini il potenziale $\varphi(y)$ in un generico punto dell'asse y con $y>L$, tale che $\varphi(2L)=0$.

b) Si determini il campo elettrico $\vec{E}(y)$ in un generico punto dell'asse y con $y>L$ e si verifichi che abbia il corretto andamento asintotico per $y\gg L$.

c) Due particelle identiche di massa m e carica $q>0$ sono vincolate e muoversi una sull'asse x e l'altra sull'asse z, trovandosi inizialmente a riposo rispettivamente nelle posizioni $(M,0,0)$ e $(0,0,M)$, con $M\gg L$. Trascurando la forza peso si determini la velocità asintotica v_∞ delle due particelle.

Problema 2

Nel circuito in figura il generatore crea una differenza di potenziale $\mathcal{E}>0$ costante. Inizialmente l'interruttore T è chiuso e il sistema si trova a regime.



a) Si determinino la carica Q^* presente sul condensatore e la corrente I^* che attraversa l'induttanza.

b) All'istante $t=0$ si apre l'interruttore T. Si scriva l'equazione differenziale a cui deve obbedire la carica $Q(t)$ del condensatore per $t\geq 0$ e si determinino le condizioni iniziali a $t=0$ per cui tale equazione ammette soluzione $Q(t)$ unica.

c) Assumendo nota $Q(t)$, e ponendo $I(t)\equiv\dot{Q}(t)$, si determini il legame esistente tra Q^*, I^* e $I(t)$ in base al principio di conservazione dell'energia, applicato tra gli istanti $t=0^+$ e $t=\infty$. *Suggerimento:* per $t\to\infty$ si ha $I(t)\to 0$.

d) Ponendo $C=4L/3R^2$ si determini la soluzione *generale* $Q_g(t)$ dell'equazione differenziale di cui al quesito b). Qual è l'andamento asintotico di $Q_g(t)$ per $t\to\infty$?

Soluzioni

Problema 1

a) La densità lineare di carica è data da $\lambda = Q/L$. Integrando il potenziale prodotto da un tratto infinitesimo ds, situato nella posizione s, nel punto $(0, y, 0)$ si ottiene

$$\widetilde{\varphi}(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda ds}{y-s} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{y-L}{y}.$$

Per ottenere un potenziale $\varphi(y)$ soddisfacente $\varphi(2L) = 0$ occorre porre $\varphi(y) = \widetilde{\varphi}(y) + C$, con $C = -\widetilde{\varphi}(2L)$, ovvero

$$C = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{2(y-L)}{y}.$$

b)

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y(y-L)} \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y^2}.$$

c) Applicando per il potenziale prodotto dalla distribuzione lineare la formula asintotica - le coordinate delle due particelle soddisfano in qualsiasi istante la condizione $|\vec{x}| \gg L$ - dalla conservazione dell'energia totale per un sistema di particelle in presenza di un campo esterno, si ottiene

$$2 \cdot \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 M} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}M)} = 2\cdot\frac{1}{2}\,mv_\infty^2$$

Problema 2

a) $Q^* = \mathcal{E}C$ e $I^* = \mathcal{E}/R$.

b) Se l'interruttore T è aperto il circuito equivale a una resistenza $2R$ in serie con un'induttanza e un condensatore. L'equazione corrispondente è

$$\frac{Q}{C} + L\dot{I} + 2RI = 0, \quad \text{ovvero} \quad \ddot{Q} + \frac{2R}{L}\,\dot{Q} + \frac{1}{LC}\,Q = 0. \tag{1}$$

Visto che né la carica di un condensatore né la corrente che attraversa un'induttanza possono variare con discontinuità, i valori iniziali sono quelli *precedenti* l'apertura di T, ovvero $Q(0) = Q^* = \mathcal{E}C$ e $\dot{Q}(0) = -I^* = -\mathcal{E}/R$.

c) L'energia immagazzinata a $t = 0$ nel condensatore e nell'induttanza si dissipa completamente per effetto Joule nelle due resistenze:

$$\frac{1}{2}\,LI^{*2} + \frac{1}{2}\,\frac{Q^{*2}}{C} = \int_0^\infty 2RI^2(t)dt.$$

d) L'*equazione caratteristica* associata a (1) è

$$\alpha^2 + \frac{2R}{L}\,\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{L} \pm \frac{R}{2L},$$

sicché $\alpha_1 = -R/2L$ e $\alpha_2 = -3R/2L$ e $Q_g(t) = c_1\,e^{\alpha_1 t} + c_2\,e^{\alpha_2 t}$. Per $t \to \infty$ si ha quindi $Q_g(t) \sim e^{-tR/2L}$.