Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 15/11/2019

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

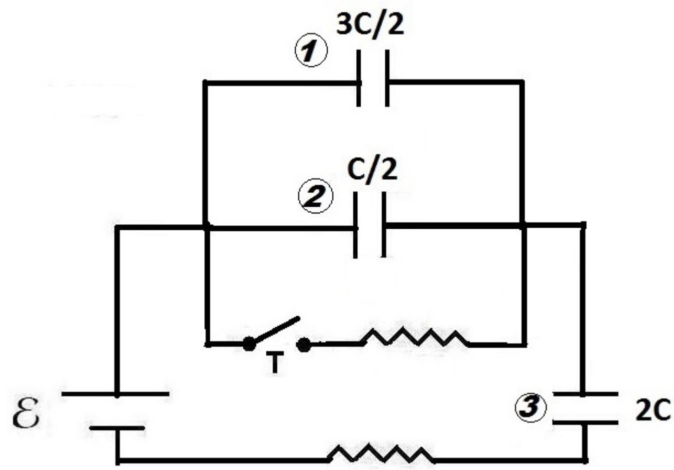
Problema A

Nel circuito in figura inizialmente l'interruttore T è aperto e il sistema si trova a regime (stato a). A un certo istante si chiude l'interruttore T e si attende nuovamente che il sistema vada a regime (stato b).

a) Si determinino le cariche Q_1, Q_2 e Q_3 presenti sui condensatori nello stato a.

b) Si determini la variazione dell'energia elettrostatica $\Delta U = U_b - U_a$ immagazzinata complessivamente nei condensatori, tra lo stato a e lo stato b.

c) Si determini il valore numerico del rapporto $f = W_J/E_g$ tra il calore W_J dissipato per effetto Joule e l'energia E_g fornita dal generatore, durante il passaggio dallo stato a allo stato b.



Problema B

Su un disco di raggio R appartenente al piano yz e centrato nell'origine si trova una distribuzione di carica con densità *superficiale* uniforme $\sigma > 0$. Nel punto $(R/4, 0, 0)$ è fissata una particella con carica $-Q < 0$.

a) Si determini il potenziale elettrostatico totale $\varphi(x)$ sull'asse x.

b) Sapendo che nel punto $(3R/4, 0, 0)$ il campo elettrico è nullo, si determini il valore numerico del rapporto $Q/\sigma R^2$.

c) Una carica di prova di massa m e carica q compie un moto pressoché circolare uniforme, con centro l'origine, passando per il punto $(3b, 4b, 0)$, con $b \gg R$. Si determini la velocità v della carica e si dica se vale $q > 0$ o $q < 0$. *Suggerimento*: si ricordi l'espressione dell'accelerazione centripeta $a = v^2/r$.

Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 15/11/2019

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo **conciso** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si definisca il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ di un sistema di cariche puntiformi e si derivi l'espressione del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ a grandi distanze dal sistema, in termini di $\vec{p}$ e della carica totale Q. Si specifichi l'ordine dell'errore $O(1/r^n)$ del risultato finale.

1b) Si scrivano le equazioni fondamentali dell'Elettrostatica in forma differenziale e integrale e si dimostri che sotto opportune condizioni ammettono soluzione unica. Qual è il significato fisico di questo risultato? Il campo dato da $\vec{E}(x, y, z) = (kx, 0, 0)$, con k costante, definisce un campo elettrostatico *fisico*? Si motivi la risposta.

Gruppo 2

2a) Si derivi il legame esistente tra la densità di corrente $\vec{j}$, la densità di carica ρ e la velocità delle cariche $\vec{v}$. Si enunci il *postulato della conservazione locale della carica* e si derivi l'*equazione di continuità* per ρ e $\vec{j}$. Si spieghino i concetti di conservazione *locale* e *globale* della carica.

2b) Come si definisce il *momento di dipolo magnetico* $\vec{\mu}$ associato a una generica densità di corrente $\vec{j}$? Conoscendo l'espressione del momento di dipolo magnetico di una spira $\vec{r}(\lambda)$ percorsa da corrente I,

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{r},$$

si derivi l'espressione del momento $\vec{M}$ delle forze magnetiche agenti sulla spira in termini di $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$. Si motivino le approssimazioni fatte.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Nello stato a tutte le cariche sono costanti e tutte le correnti sono nulle. La capacità equivalente C_a del circuito è determinata da

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{\frac{3C}{2} + \frac{C}{2}} + \frac{1}{2C} \quad \Rightarrow \quad C_a = C,$$

sicché la carica equivalente vale $Q_3 = C\mathcal{E}$. Da $Q_1 + Q_2 = C\mathcal{E}$ e $Q_1/Q_2 = 3$ seguono i valori $Q_1 = \frac{3}{4}C\mathcal{E}$ e $Q_2 = \frac{1}{4}C\mathcal{E}$.

b) Anche nello stato b tutte le correnti sono nulle. Segue che la differenza di potenziale ai capi della resistenza che si trova accanto all'interruttore è nulla. Conseguentemente i condensatori 1 e 2 sono scarichi, mentre la carica del condensatore 3 vale $Q_3' = 2C\mathcal{E}$. Si ha quindi $U_a = \frac{1}{2}(C\mathcal{E})^2/C = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$ e $U_b = \frac{1}{2}(2C\mathcal{E})^2/2C = C\mathcal{E}^2$, sicché $\Delta U = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$.

c) Il generatore fornisce l'energia $E_\mathrm{g} = \mathcal{E}(Q_3' - Q_3) = C\mathcal{E}^2$. D'altra parte la conservazione dell'energia stabilisce che $E_\mathrm{g} = \Delta U + W_\mathrm{J}$, da cui $W_\mathrm{J} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Segue $f = 1/2$.

Problema B

a) Una corona circolare di raggio s e spessore infinitesimo ds produce nel punto $(x, 0, 0)$ il potenziale $d\varphi(x) = \sigma(2\pi s ds)/4\pi\varepsilon_0\sqrt{s^2 + x^2}$. Integrando questa espressione tra 0 e R, e aggiungendo il potenziale coulombiano della carica $-Q$, si trova l'espressione

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2 + R^2} - |x|\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|x - \frac{R}{4}\right|}.$$

b) Sull'asse x il campo elettrico ha solo una componente x, data per $x > R/4$ da

$$E(x) = -\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x - \frac{R}{4}\right)^2}.$$

Imponendo $E(3R/4) = 0$ si ricava

$$\frac{Q}{\sigma R^2} = \frac{\pi}{5}.$$

c) A grandi distanze il campo elettrico tende al campo coulombiano, con carica totale $Q' = \pi R^2\sigma - Q = 4Q > 0$. L'equazione di Newton dà quindi

$$\frac{|q|Q'}{4\pi\varepsilon_0(5b)^2} = m\,\frac{v^2}{5b} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{|q|Q}{5\pi\varepsilon_0 mb}.$$

Affinché sia possibile un moto circolare la forza di Coulomb deve essere attrattiva, ovvero $qQ' < 0$. Visto che $Q' > 0$ deve dunque essere $q < 0$.