Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 16/11/2018

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Tra i punti $(-L, 0, 0)$ e $(L, 0, 0)$ dell'asse x, con $L > 0$, è disposta una distribuzione filiforme di carica con densità *lineare* costante $\lambda > 0$.

a) Si determini il potenziale elettrico $\varphi(x)$ sull'asse x nelle regioni $x > L$ e $x < -L$, tracciandone qualitativamente il grafico. Si verifichi che per $|x| \gg L$ la funzione $\varphi(x)$ possiede il corretto andamento asintotico. *Suggerimento*: si ricordi lo sviluppo in serie di Taylor $\ln(1 + u) = u + O(u^2)$.

b) Si determini la componente a_z dell'accelerazione di una carica di prova di massa m e carica q quando passa per il punto $P = (0, 3R, 4R)$, con $R \gg L$. Si trascuri la forza peso.

c) Si supponga che, in presenza della sola distribuzione lineare di carica, nel punto $A = (-2L, 0, 0)$ si trovi una particella di carica $Q_A > 0$ e nel punto $B = (3L, 0, 0)$ una particella di carica $Q_B > 0$, entrambe inizialmente a riposo. Trascurando la forza peso si determini l'energia cinetica totale T_∞ delle due particelle nel limite di $t \to \infty$.

Problema B

Quattro biglie conduttrici con raggi $r_1 = r_2 = R$ e $r_3 = r_4 = 2R$ sono centrate rispettivamente nei verti $P_1 = (a, a, 0)$, $P_2 = (a, -a, 0)$, $P_3 = (-a, -a, 0)$ e $P_4 = (-a, a, 0)$ di un quadrato di lato $2a$, con $a \gg R$. Le biglie 1 e 4 sono collegate fra loro attraverso un sottile filo conduttore e allo stesso modo sono collegate le biglie 2 e 3. La carica della biglia 2 vale $Q_2 = 2Q$ e quella della biglia 4 vale $Q_4 = -2Q$, mentre Q_1 e Q_3 sono incognite.

a) Si determini il flusso $\Phi(\vec{E})$ del campo elettrico attraverso una generica superficie chiusa contenente tutte e quattro le biglie.

b) A un certo istante si collegano anche le biglie 1 e 2 attraverso un sottile filo conduttore. Si determinino le cariche Q_1^*, Q_2^*, Q_3^* e Q_4^*, nonché l'energia elettrostatica U_e del sistema, dopo questo collegamento.

c) Si supponga che oltre alle quattro biglie, collegate come nel quesito b), vi sia un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B}$. Si osserva che, trascurando la forza peso, una particella carica *non vincolata all'asse* x compie un moto rettilineo accelerato lungo l'asse x. Si determini la direzione $\vec{n} = \vec{B}/B$ del campo magnetico. *Suggerimento*: si determini la *direzione* del campo elettrico $\vec{E}$ prodotto dalle biglie sull'asse x.

Primo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 16/11/2018

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Cosa asserisce il *teorema di Laplace* a riguardo delle soluzioni dell'equazione $\nabla^2\varphi = 0$? Si dimostri che la capacità C di un conduttore in assenza di campo elettrico esterno è costante. Si dimostri che, nota la carica totale Q del conduttore, la distribuzione superficiale di carica $\sigma(S)$ è univocamente determinata.

1b) Si derivi la rappresentazione integrale del potenziale elettrostatico $\varphi(\vec{x})$ in termini della densità di carica $\rho(\vec{x})$, a partire dalla *legge di Coulomb*. Dall'espressione di $\varphi(\vec{x})$ si ricavi la rappresentazione integrale del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$. Qual è l'andamento di $\varphi(\vec{x})$ per grandi valori di $|\vec{x}|$ nel caso in cui la carica totale Q del sistema è zero?

Gruppo 2

2a) Quali sono le caratteristiche sperimentali della forza magnetica $\vec{F}(\vec{v})$ agente su una particella con velocità $\vec{v}$ e carica q? Da tali caratteristiche si derivi la forma di $\vec{F}(\vec{v})$ e quindi la *seconda legge elementare di Laplace*.

2b) Si determini l'espressione dell'energia elettrostatica U_e di un sistema di cariche puntiformi, a partire dalla *legge di Coulomb*. Si spieghi il legame tra U_e e il lavoro L compiuto dal campo elettrico per formare la distribuzione di carica. Qual è l'espressione dell'energia meccanica conservata di un sistema di cariche puntiformi in presenza di un campo elettrostatico esterno?

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Indicando la coordinata di un generico punto del filo carico con s, un suo tratto lungo ds genera in un punto $x > L$ il potenziale $d\varphi(x) = \lambda ds/4\pi\varepsilon_0(x-s)$. Integrando questa espressione in s tra $-L$ e L si ottiene

$$\varphi(x) = \int_{-L}^{L} d\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{x+L}{x-L}\right).$$

Analogamente per $x < -L$ si trova

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{x-L}{x+L}\right),$$

sicché $\varphi(-x) = \varphi(x)$, come deve essere. Per $x \gg L$ si ha $\ln\left(\frac{x+L}{x-L}\right) = \ln\left(\frac{1+L/x}{1-L/x}\right) \approx 2L/x$ e quindi ($Q = 2L\lambda$)

$$\varphi(x) \approx \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0|x|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|x|}.$$

b) Visto che $|\mathbf{OP}| = 5R \gg L$, vale l'approssimazione $m\vec{a} \approx qQ\mathbf{OP}/4\pi\varepsilon_0|\mathbf{OP}|^3 = qQ(0,3R,4R)/4\pi\varepsilon_0|\mathbf{OP}|^3$, e quindi

$$a_z = \frac{qQ}{125m\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

c) Essendo $\lambda > 0$, avendo carica positiva le due particelle iniziano a muoversi sull'asse x in direzioni opposte, tendendo rispettivamente alle posizioni $x_\pm \to \pm\infty$. Dalla conservazione dell'energia meccanica totale si ricava allora

$$T_\infty + 0 = 0 + \frac{Q_A Q_B}{4\pi\varepsilon_0(5L)} + Q_A\varphi(-2L) + Q_B\varphi(3L) = \frac{Q_A Q_B}{20\pi\varepsilon_0 L} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(Q_A \ln 3 + Q_B \ln 2\right).$$

Problema B

a) Le biglie 1 e 4 formano un unico conduttore e similmente le biglie 2 e 3. Sotto l'ipotesi di distribuzioni di carica isotrope, giustificata dalla condizione $R \ll a$, uguagliando i rispettivi potenziali si ha $Q_1/r_1 = Q_4/r_4$ e $Q_3/r_3 = Q_2/r_2$, da cui $Q_1 = -Q$ e $Q_3 = 4Q$. Il teorema di Gauss dà quindi $\Phi(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{4} Q_i/\varepsilon_0 = 3Q/\varepsilon_0$.

b) Collegando tutte le biglie si ottiene un unico conduttore con carica totale $Q_{\text{tot}} = 3Q$. Visto che le biglie 1 e 2 (e 3 e 4) hanno lo stesso raggio, si ha $Q_1^* = Q_2^*$ e $Q_3^* = Q_4^*$, da cui $2(Q_1^* + Q_4^*) = 3Q$. Inoltre $Q_4^*/Q_1^* = r_4/r_1 = 2$ e si ricava $Q_1^* = Q_2^* = Q/2$ e $Q_3^* = Q_4^* = Q$. L'energia elettrostatica si può calcolare come

$$U_{\text{e}} = \frac{1}{2}\varphi_{\text{f}}\, Q_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^*}{4\pi\varepsilon_0 r_1} 3Q = \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

c) Dall'equazione di Lorentz $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ si ricava

$$q\vec{v}\times\vec{B} = m\vec{a} - q\vec{E}, \tag{1}$$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico generato dalle quattro biglie sull'asse x. Visto che questo'ultimo per motivi di simmetria è diretto lungo l'asse x, il membro di destra dell'equazione (1) è parallelo all'asse x. Al contrario, visto che $\vec{v}$ è parallelo all'asse x, il membro di sinistra della (1) è ortogonale all'asse x. Deve dunque essere $m\vec{a} - q\vec{E} = 0$ e $\vec{v}\times\vec{B} = 0$. L'ultima equazione implica che $\vec{B}$ è parallelo a $\vec{v}$, ovvero all'asse x. Segue quindi $\vec{n} = (\pm 1, 0, 0)$.