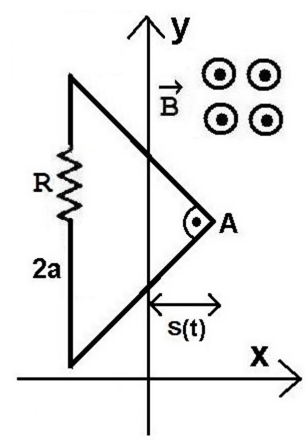
Secondo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 17/01/2020

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Una spira conduttrice della forma di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa $2a$, massa m e resistenza R è vincolata a muoversi nel piano xy mantenendo l'ipotenusa parallela all'asse y. Nella regione delle x positive vi è un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $B > 0$, mentre nella regione delle x negative il campo magnetico è nullo. Sia $s \equiv s(t)$ la distanza del vertice A della spira dall'asse y all'istante t, vedi figura. I dati iniziali sono $s(0) = 0$ e $\dot{s}(0) = v_0 > 0$. Si considerino solo istanti t per cui l'ipotenusa rimane nella regione delle x negative, corrispondenti a $s(t) < a$.



a) Nell'istante in cui $s = a/2$ si osserva che la spira ha velocità v^*. Si determini la corrente I^* circolante nella spira nello stesso istante, specificando se ha verso orario o antiorario.

b) Si dimostri che $s(t)$ soddisfa un'equazione differenziale della forma

$$\ddot{s} = ks^n \dot{s}, \tag{1}$$

determinando i valori delle costanti reali k ed n.

c) Si determini la velocità $v(s)$ della spira come funzione di s. *Suggerimento*: si dimostri l'identità $\ddot{s} = \dot{s}\,\frac{dv}{ds}$.

Problema B

Un anello conduttore A_1 di raggio R centrato nell'origine O e appartenente al piano xy è percorso dalla corrente $I > 0$ (con verso concorde con l'asse z, secondo la regola della mano destra) e un anello A_2 di raggio aR, $a > 0$, centrato in O e appartenente al piano yz è percorso dalla corrente $2I$ (concorde con l'asse x).

a) Per $a = 2$ si determini il modulo $B(O)$ e la direzione $\vec{u}$ del campo magnetico nell'origine.

b) Per $a \ll 1$ si determini il momento $\vec{M}$ delle forze magnetiche esercitate dall'anello A_1 sull'anello A_2.

c) Per $a = 1/2$ si determini la direzione di equilibrio stabile $\vec{n}$ di un piccolo ago magnetico posto nel punto $P = (0, L, 0)$, con $L \gg R$. *Suggerimento*: si ricordi la formula del *campo di dipolo magnetico*

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{3\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})\,\vec{x}}{r^2} - \vec{\mu}\right).$$

Secondo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 17/01/2020

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) In che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione dei tempi*? Si derivi questo fenomeno ricorrendo alle trasformazioni di Lorentz speciali e si descriva un esperimento che lo verifica nella realtà. Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione del campo magnetico $\vec{B}(t, \vec{x})$ da un sistema di riferimento inerziale a un altro che si muove rispetto al primo con velocità v lungo l'asse x?

1b) Si scrivano le *equazioni fondamentali dell'Elettrodinamica* in forma covariante a vista. Si verifichi che l'equazione di Lorentz in forma covariante a vista è equivalente a un'opportuna modifica dell'equazione di Lorentz tridimensionale formulata in ambito non relativistico. Come imposterebbe la derivazione della legge di trasformazione della densità di corrente $\vec{j}(t, \vec{x})$ da un sistema di riferimento inerziale a un altro che si muove rispetto al primo con velocità v lungo l'asse x?

Gruppo 2

2a) Cosa si sfrutta, rispettivamente, per derivare le equazioni

$$\text{a)}\ \frac{\partial w_{\rm em}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}, \qquad \text{b)}\ \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}\, d^3x = \frac{d}{dt} \sum_{j \in V} \varepsilon_j \ ?$$

A partire da tali equazioni si dimostri che in elettrodinamica l'energia *totale* si conserva. Supponendo che il vettore di Poynting $\vec{S}$ sul bordo di un certo volume V sia zero, in generale l'energia del campo elettromagnetico $\varepsilon^V_{\rm em}$ contenuta in V è costante? Si motivi la risposta.

2b) Si scrivano le *equazioni fondamentali della magnetostatica* e le si risolvano derivando per $\vec{B}$ una rappresentazione integrale in termini di $\vec{j}$. In particolare si specifichi il motivo per cui si può imporre la *gauge di Coulomb* $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. A partire dall'espressione di $\vec{B}$ ottenuta si discuta l'andamento del campo magnetico a grandi distanze dalle correnti.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Orientando la spira in senso orario si ha $\Phi = -s^2 B$, sicché $\varepsilon = -\dot{\Phi} = 2svB$, con $v = \dot{s}$. Indicando con I la corrente con verso orario l'equazione del circuito diventa allora $\varepsilon = RI$, ovvero $RI = 2svB$. Di conseguenza la corrente all'istante richiesto vale $I^* = av^*B/R > 0$ e ha quindi verso orario, in accordo con la legge di Lenz.

b) I due tratti di spira che si trovano nella regione $x > 0$ sono soggetti a forze magnetiche, secondo la seconda legge elementare di Laplace, la cui somma vettoriale fa $\vec{F} = -2IBs\vec{u}_x = -(4B^2s^2v/R)\vec{u}_x$. La componente x dell'equazione di Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ diventa allora

$$\ddot{s} = ks^2\dot{s}, \qquad k = -\frac{4B^2}{mR}, \qquad n = 2.$$

c) Si ha $\ddot{s} = dv/dt = (dv/ds)(ds/dt) = \dot{s}(dv/ds)$, da cui

$$\frac{dv}{ds} = ks^2 \quad \Rightarrow \quad v(s) = v_0 + \frac{1}{3}\,ks^3.$$

Se vale $v_0 < -ka^3/3$, la spira si ferma prima di aver attraversato l'asse y.

Problema B

a) Applicando la prima legge elementare di Laplace si trova che un anello crea nel suo centro un campo magnetico dato in modulo da $B = \mu_0 I/2r$. Il campo magnetico totale creato dai due anelli nell'origine vale quindi (per $a = 2$)

$$\vec{B}(O) = \vec{B}_1(O) + \vec{B}_2(O) = \frac{\mu_0 I}{2R}\,\vec{u}_z + \frac{2\mu_0 I}{2aR}\,\vec{u}_x = \frac{\mu_0 I}{2R}\,(1,0,1).$$

Segue $B(O) = \mu_0\sqrt{2}I/2R$ e $\vec{u} = (1,0,1)/\sqrt{2}$.

b) Per $a \ll 1$ il campo magnetico creato da A_1 varia poco nella regione occupata da A_2 e può quindi essere posto uguale a $\vec{B}_1(O)$. Si può allora applicare la formula $\vec{M} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}_1(O)$, con $\vec{\mu}_2 = \pi(aR)^2 2I\vec{u}_x$. Si trova $\vec{M} = -\mu_0\pi a^2 RI^2\vec{u}_y$.

c) Visto che $L \gg R$ il campo magnetico è ben approssimato dal campo di dipolo. Il momento di dipolo magnetico dei due anelli vale $\vec{\mu} = \pi R^2 I\vec{u}_z + \pi(aR)^2 2I\vec{u}_x = \pi R^2 I(1/2,0,1)$. Per il campo magnetico nel punto P si ottiene quindi

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi L^3}\,\vec{\mu} = -\frac{\mu_0 R^2 I}{8L^3}\,(1,0,2),$$

sicché la direzione di equilibrio stabile dell'ago è $\vec{n} = -(1,0,2)/\sqrt{5}$.