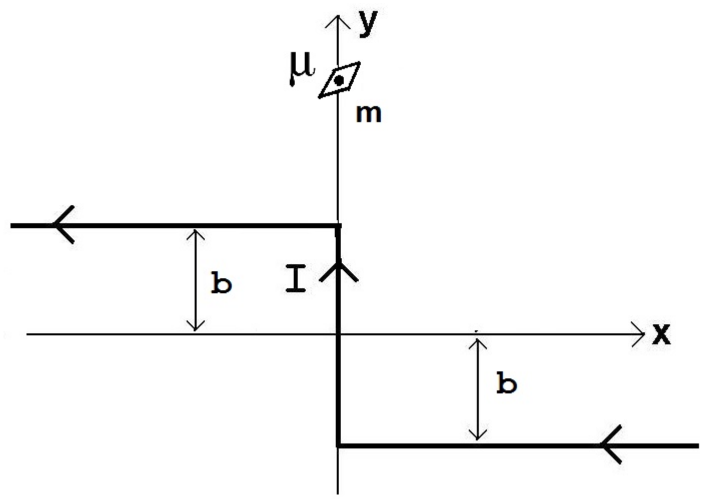
Secondo compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 18/01/2019

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema A

Un filo conduttore infinito giacente nel piano xy, formato da due semirette parallele all'asse x e da un tratto finito lungo $2b$, è percorso da una corrente costante I con il verso indicato in figura. Un piccolo ago magnetico di massa m e di momento di dipolo magnetico di modulo μ è vincolato a muoversi senza attrito sull'asse y. Si trascuri la forza peso.



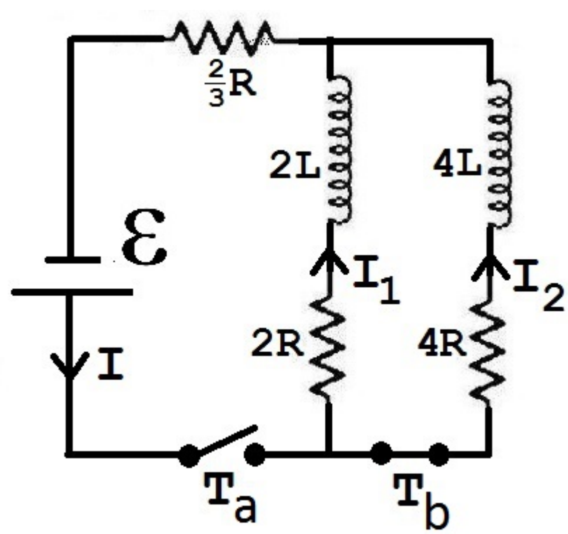
a) Si determini il campo magnetico $\vec{B}(y)$ in un generico punto $(0, y, 0)$ dell'asse y con $|y| > b$.

b) Si determini il lavoro L svolto dal campo magnetico per ruotare l'ago dalla direzione iniziale $\vec{n}_\mathrm{i} = (0, 3/5, 4/5)$ alla sua direzione di equilibrio stabile, quando l'ago si trova nella posizione $y = 3b$. Si specifichi se $L > 0$ o $L < 0$.

c) Supponendo che l'ago sia diretto costantemente lungo la direzione di equilibrio stabile, si determini la sua accelerazione $\ddot{y}$ quando passa per la posizione $y = 2b$. Si specifichi se $\ddot{y} > 0$ o $\ddot{y} < 0$.

Problema B

Nel circuito in figura il generatore genera una differenza di potenziale costante $\mathcal{E}$ e inizialmente l'interruttore T_b è chiuso, mentre l'interruttore T_a è aperto. All'istante $t = 0$ si chiude anche l'interruttore T_a.



a) Si determinino la corrente $I(0)$ immediatamente dopo la chiusura di T_a e le correnti a regime $I_1(\infty)$ e $I_2(\infty)$.

b) Si dimostri che per ogni $t \geq 0$ vale $I_2(t) = kI_1(t)$ per un'opportuna costante k. *Suggerimento*: si analizzi la legge di Kirchhoff per la maglia contenente le due induttanze.

c) Si determini la corrente $I_1(t)$ per un generico istante $t \geq 0$.

d) Quando il circuito si trova a regime si apre l'interruttore T_b. Si determini il valore numerico del rapporto $f = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}$ tra la forza elettromotrice indotta nell'induttanza $2L$ e la differenza di potenziale del generatore, a un istante immediatamente *successivo* all'apertura di T_b.

Secono compitino di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 18/01/2019

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Si spieghi in maniera qualitativa in che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione dei tempi.* Si derivi questo fenomeno ricorrendo alle trasformazioni di Lorentz speciali e si descriva un esperimento che lo verifica nella realtà. Si derivi la legge di trasformazione della densità di carica ρ sotto una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse x con velocità v. *Suggerimento*: si ricordi che la quadricorrente j^μ costituisce un *tensore.*

1b) Si illustrino molto brevemente il significato e l'importanza del concetto della *covarianza a vista.* Si scriva l'equazione di Lorentz in forma covariante a vista e si verifichi che essa è equivalente all'equazione di Lorentz tridimensionale *opportunamente modificata.* La *legge della potenza* per una particella carica soddisfa il *principio di relatività einsteiniana* ? Si motivi la risposta.

Gruppo 2

2a) Si spieghi il funzionamento del *betatrone*, derivando in particolare il vincolo a cui deve soddisfare il campo magnetico. Si esprima l'energia cinetica massima ε_{M} dell'elettrone in termini del campo magnetico massimo B_{M} realizzabile lungo la traiettoria. Per quali valori di B_{M} è corretto affrontare il problema usando l'equazione di Lorentz *non-relativistica*?

2b) Si dica per quale motivo l'*equazione di Ampere* nel caso di campi variabili nel tempo deve essere modificata. Come si collega tale modifica con le proprietà delle equazioni di Maxwell considerate nell'ambito della Relatività Ristretta? Quale nuovo fenomeno fisico viene introdotto dall'*equazione di Ampere-Maxwell*? Si illustri la consistenza della presenza della *corrente di spostamento* analizzando il processo di carica di un condensatore.

Soluzione dei problemi

Problema A

a) Dalla prima legge elementare di Laplace segue che il tratto di filo lungo $2b$ non contribuisce al campo magnetico sull'asse y. Le due semirette generano invece ciascuna un campo di "mezzo filo"

$$\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{y-b} + \frac{1}{y+b}\right)\vec{u}_z = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi(y^2-b^2)}\,\vec{u}_z.$$

b) Vale $L = \Delta\left(\vec{\mu}\cdot\vec{B}(3b)\right) = \mu\left((\vec{n}_{\rm st} - \vec{n}_{\rm i})\cdot\vec{B}(3b)\right)$, dove la direzione di equilibrio stabile per $y = 3b$ è $\vec{n}_{\rm st} = -(0,0,1)$. Si trova

$$L = -\frac{3\mu_0\mu I}{16\pi b}\left(-1-\frac{4}{5}\right) = \frac{27\mu_0\mu I}{80\pi b}.$$

c) L'energia potenziale dell'ago è data da

$$U(y) = -\mu\,\vec{n}_{\rm st}\cdot\vec{B}(y) = -\frac{\mu_0\mu I y}{2\pi(y^2-b^2)},$$

sicché la forza agente sull'ago in direzione y risulta essere

$$F_y(y) = -\frac{dU(y)}{dy} = -\frac{\mu_0\mu I(y^2+b^2)}{2\pi(y^2-b^2)^2}.$$

Dall'equazione di Newton valutata nel punto $(0,2b,0)$ si ottiene allora

$$\ddot{y} = \frac{F_y(2b)}{m} = -\frac{5\mu_0\mu I}{18\pi m b^2}.$$

Problema B

a) Per la continuità delle correnti nelle induttanze si ha $I_2(0) = I_1(0) = 0$, e quindi $I(0) = 0$. A regime le correnti sono costanti, sicché le differenze di potenziale ai capi delle induttanze sono nulle. La resistenza equivalente del circuito vale $R_{\rm eq} = 2R/3 + 1/(1/2R + 1/4R) = 2R$ e quindi $I(\infty) = \mathcal{E}/2R$. Segue $I_1(\infty) = \mathcal{E}/3R$ e $I_2(\infty) = \mathcal{E}/6R$.

b) La legge per la maglia di destra $2RI_1 + 2L\dot{I}_1 = 4RI_2 + 4L\dot{I}_2$ si può porre nella forma $L\dot{f} + Rf = 0$, con $f = I_1 - 2I_2$. Con la condizione iniziale $f(0) = 0$ essa ha soluzione $f = 0$, sicché $I_2 = I_1/2$.

c) Visto che $I = I_1 + I_2 = 3I_1/2$, l'equazione per la maglia di sinistra diventa

$$\mathcal{E} = 2RI_1 + 2L\dot{I}_1 + \frac{2R}{3}\frac{3I_1}{2} = 3RI_1 + 2L\dot{I}_1,$$

che con la condizione iniziale $I_1(0) = 0$ ammette la soluzione unica

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{3R}\left(1 - e^{-3Rt/2L}\right).$$

d) Se si apre l'interruttore $T_{\rm b}$, per continuità la corrente iniziale della maglia rimasta è uguale alla corrente che scorre nell'induttanza $2L$ prima dell'apertura, ovvero $I_1(\infty) = \mathcal{E}/3R$. Dalla legge della maglia si ottiene allora $\mathcal{E}_i = \mathcal{E} - \frac{8R}{3}\,I_1(\infty) = \mathcal{E}/9$ e dunque $f = 1/9$.