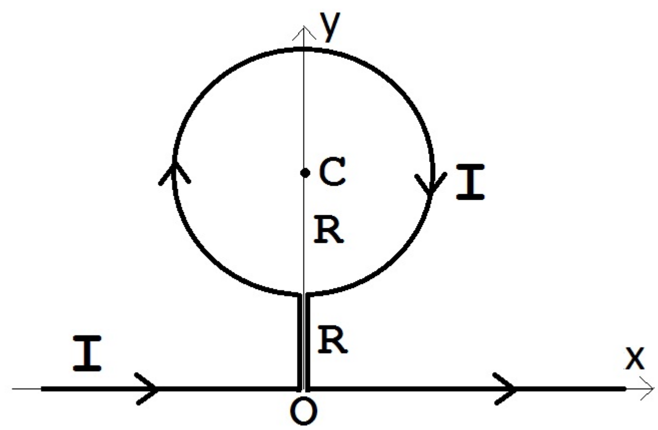
Secondo compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 19/01/2018

Problemi

Si raccomanda di scrivere in modo chiaro e leggibile.

Problema 1

Un circuito infinito percorso da corrente I è composto da due semirette terminanti nell'origine O disposte lungo l'asse x, collegate attraverso due tratti rettilinei paralleli all'asse y a una spira circolare giacente nel piano xy di raggio R con centro nel punto $C = (0, 2R, 0)$, vedi figura. Si consideri la distanza tra i due tratti rettilinei trascurabile.



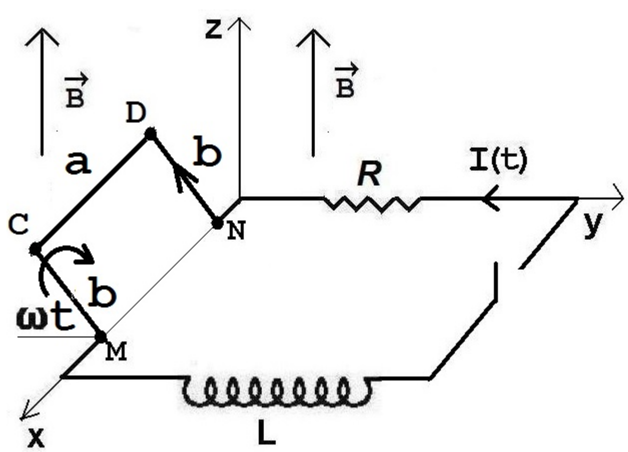
a) Si determini la direzione di equilibrio stabile $\vec{n}$ di un ago magnetico posto nel punto C.

b) Si dimostri che lungo la retta $\vec{x}(L) = (0, 3L, 4L)$, con $L \gg R$, la componente y del campo magnetico totale decade come $B_y(L) \approx a/L^b$, determinando i valori delle costanti reali a e b. Si giustifichi il procedimento.

c) Si supponga che il sistema si trovi anche in presenza di un campo elettrico costane e uniforme $\vec{E}$. Una particella carica compie un moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$, con $v > 0$, lungo la retta parallela all'asse x passante per il punto $P = (0, 0, M)$, con $M \gg R$. Trascurando la forza peso si determini il vettore $\vec{E}$.

Problema 2

Nel circuito in figura il tratto CD, di lunghezza a, ruota attorno all'asse x con velocità angolare costante ω in senso *orario*, mantenendosi parallelo all'asse x, di modo tale che l'angolo tra il tratto MC, di lunghezza b, e l'asse delle y negative valga ωt, vedi figura. Il sistema si trova in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, con $B > 0$. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore.



a) Si scriva l'equazione differenziale a cui deve obbedire la corrente $I(t)$, orientata come in figura, per $t > 0$.

b) Si determinino le derivate prima e seconda della corrente $\dot{I}(0)$ e $\ddot{I}(0)$ immediatamente dopo la chiusura del circuito. Negli istanti iniziali dopo la chiusura del circuito, la corrente fluisce in senso orario o antiorario? *Suggerimento:* si consideri l'equazione differenziale trovata al punto precedente e la sua derivata prima.

c) Supponendo che la resistenza R sia trascurabile, si determini la forza magnetica $\vec{F}$ agente sul tratto CD all'istante $t = \pi/\omega$.

Secono compitino di *Fisica II* - Laurea in Matematica - 19/01/2018

Teoria

Si risponda a un quesito del Gruppo 1 e a un quesito del Gruppo 2.

Si scriva in modo leggibile e si giustifichino in modo ***conciso*** *i passaggi essenziali.*

Gruppo 1

1a) Dando per scontato che le trasformazioni delle coordinate spazio-temporali da un sistema di riferimento inerziale a un altro sono *lineari*, si dimostri il *teorema dell'invarianza dell'intervallo*, specificando i *postulati della relatività* che di volta in volta si usano. Si derivi la legge di trasformazione dell'*energia relativistica* di una particella ε sotto una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse x con velocità v. *Suggerimento*: si ricordi il significato delle varie componenti del *quadrimomento* p^μ.

1b) Si illustrino molto brevemente il significato e l'importanza del concetto della *covarianza a vista*. Si scrivano le *equazioni di Maxwell* in forma covariante a vista e si verifichi che l'*equazione di Ampere-Maxwell* segue da tali equazioni. Si derivi la legge di trasformazione della densità di carica ρ sotto una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse x con velocità v. *Suggerimento*: si ricordi il significato delle varie componenti della *quadricorrente* j^μ.

Gruppo 2

2a) Dando per scontato che campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soddisfacenti le equazioni di Maxwell nel vuoto soddisfano anche l'equazione delle onde, si derivi una base completa di soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto. Quali sono le osservazioni sperimentali che hanno portato Maxwell a identificare la luce come un fenomeno elettromagnetico? Cosa hanno invece dimostrato gli esperimenti di Hertz?

2b) Cosa si sfrutta, rispettivamente, per derivare le equazioni

$$\text{a)}\ \frac{\partial w_{\mathrm{em}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}, \qquad \text{b)}\ \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3x = \frac{d}{dt}\sum_{j\in V}\varepsilon_j\ ?$$

A partire da tali equazioni si dimostri che in elettrodinamica l'energia *totale* si conserva. Supponendo che il vettore di Poynting $\vec{S}$ sul bordo di un certo volume V sia zero, in generale l'energia del campo elettromagnetico $\varepsilon^V_{\mathrm{em}}$ contenuta in V è costante? Si motivi la risposta da un punto di vista fisico.

Soluzione dei problemi

Problema 1

a) Il campo magnetico $\vec{B}$ nel punto C è la somma del campo $\vec{B}_{\rm s}$ prodotto dalla spira circolare nel suo centro, calcolabile dalla prima legge elementare di Laplace

$$\vec{B}_{\rm s} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\times\vec{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\int ds\,\vec{u}_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\,2\pi R\,\vec{u}_z = -\frac{\mu_0 I}{2R}\,\vec{u}_z,$$

e del campo di un filo infinito $\vec{B}_{\rm f} = (\mu_0 I/4\pi R)\vec{u}_z$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\,(1-2\pi)\,\vec{u}_z.$$

La direzione di equilibrio stabile dell'ago è dunque $\vec{n} = (0,0,-1)$.

b) Visto che la spira circolare, essendo a supporto compatto, genera un campo che a grandi distanze L decresce come $1/L^3$, lungo la retta $\vec{x}(L) = (0, 3L, 4L)$ domina il campo del filo infinito. Infatti, questo'ultimo in un generico punto $\vec{x} = (x, y, z)$ vale $\vec{B}_{\rm f}(\vec{x}) = \mu_0 I\,(0, -z, y)/2\pi(y^2+z^2)$, sicché

$$\vec{B}_{\rm f}(\vec{x}(L)) = \frac{\mu_0 I}{50\pi L}\,(0,-4,3) \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{2\mu_0 I}{25\pi}, \qquad b = 1.$$

c) Visto che per $M \gg R$ domina il campo del filo, e l'accelerazione della particella è nulla, l'annullamento della forza di Lorentz nel punto $P = (0, 0, M)$ richiede

$$\vec{E} = -v\vec{u}_x \times \vec{B}_{\rm f}(P) = \frac{\mu_0 I v}{2\pi M}\,\vec{u}_z.$$

Problema 2

a) Orientando il circuito γ nello stesso verso della corrente I, il flusso attraverso γ è dato da $\Phi_\gamma(t) = B(A + ab\cos(\omega t))$, dove A è l'area della parte fissa del circuito. Segue $\varepsilon_\gamma(t) = -\dot{\Phi}_\gamma(t) = abB\omega\sin(\omega t)$. L'equazione del circuito è quindi

$$abB\omega\sin(\omega t) = L\dot{I} + RI. \tag{1}$$

b) Visto che il circuito contiene un'induttanza, per continuità si ha $I(0) = 0$. L'equazione (1) dà quindi $\dot{I}(0) = 0$. Dalla sua derivata si ricava poi $\ddot{I}(0) = abB\omega^2/L$. Visto che $\ddot{I}(0) > 0$, per tempi sufficientemente piccoli si ha $I(t) > 0$, sicché inizialmente la corrente circola in senso *antiorario*, come si ricava anche dalla *legge di Lenz*.

c) Se $R = 0$, vista la condizione iniziale $I(0) = 0$, la soluzione dell'equazione (1) è

$$I(t) = \frac{abB}{L}\,(1-\cos(\omega t))\,.$$

La corrente dopo mezzo periodo vale dunque $I(\pi/\omega) = 2abB/L$. Dalla seconda legge elementare di Laplace segue quindi

$$\vec{F} = I(\pi/\omega)\,a\vec{u}_x \times B\vec{u}_z = -\frac{2ba^2B^2}{L}\,\vec{u}_y.$$