Compito di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 12/02/2020

Problema 1

Due sfere conduttrici concentriche di raggi R e $2R$ hanno come centro comune l'origine. Le sfere sono cariche e la densità superficiale della sfera esterna vale $\sigma > 0$ e quella della sfera interna $-\sigma < 0$.

a) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ come funzione del raggio r nelle regioni $r < R$, $R < r < 2R$, $2R < r$.

b) Una particella di prova di massa m e carica $-q < 0$ si trova a un certo istante nel punto $(0, 0, 4R)$ con una velocità che in modulo vale v_1 e a un istante successivo colpisce la sfera esterna nel punto $(0, 2R, 0)$ con una velocità che in modulo vale $v_2 > v_1$. Trascurando la forza peso si determini σ.

c) A un certo istante si collegano le due sfere attraverso un sottile filo conduttore. Si determini il valore numerico del rapporto $f = \sigma^*/\sigma$, dove σ^* è la densità superficiale di carica della sfera esterna dopo il collegamento.

Problema 2

Un filo conduttore infinito a forma di "L" disposto lungo i semiassi delle x positive e delle y positive è percorso da una corrente costante $I > 0$ che fluisce nel verso delle x decrescenti e delle y crescenti. Nel punto P di coordinate $(0, 0, z)$, $z > 0$, si trova un piccolo ago magnetico di momento magnetico μ.

a) Si determinino le componenti $(B_x(z), B_y(z), B_z(z))$ del campo magnetico sull'asse z come funzioni di z e si determini la direzione di equilibrio stabile $\vec{n}$ dell'ago.

b) Si supponga che la direzione dell'ago giaccia nel piano yz formando con l'asse delle y positive un angolo di 60^o. Si determini la componente F_z della forza esercitata dal campo magnetico sull'ago.

c) Si supponga che l'ago sia sottoposto a un sistema di forze esterne, di modo tale che all'equilibrio sia diretto lungo l'asse delle x crescenti. Si determini il momento $\vec{M}_{\text{ext}}$ esercitato dalle forze esterne.

Soluzioni

Problema 1

a) Il potenziale si determina usando il principio di sovrapposizione e imponendo la continuità in $r = R$ e $r = 2R$. Una scelta possibile è

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}, & r < R, \\ -\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}, & R < r < 2R, \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{3R^2}{r} - 2R\right), & 2R < r. \end{cases}$$

b) Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = q\left(\varphi(2R) - \varphi(4R)\right) = \frac{3q\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{4R}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{2m\varepsilon_0(v_2^2 - v_1^2)}{3qR}.$$

c) Dopo il collegamento le sfere hanno lo stesso potenziale, sicché il campo elettrico nell'intercapedine tra le due deve essere zero. Di conseguenza la carica $-4\pi R^2\sigma$ della sfera interna deve essersi trasferita sulla sfera esterna, che possiede quindi la carica totale $Q = 4\pi(2R)^2\sigma - 4\pi R^2\sigma = 12\pi R^2\sigma$. Risulta quindi $\sigma^* = Q/4\pi(2R)^2 = 3\sigma/4$ e quindi $f = 3/4$.

Problema 2

a) Il tratto di filo disposto lungo il semiasse delle x crea sull'asse z un campo magnetico $\vec{B}_1$ che è metà di quello prodotto da un filo infinito ed è diretto lungo l'asse y, ovvero $\vec{B}_1 = (0, \mu_0 I/4\pi z, 0)$. Similmente l'altro tratto di filo crea sull'asse z il campo $\vec{B}_2 = (\mu_0 I/4\pi z, 0, 0)$. Il campo magnetico totale sull'asse z vale quindi

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\,(\vec{u}_x + \vec{u}_y).$$

Di conseguenza $\vec{n} = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$.

b) Si ha $F_z = -\partial U_m(z)/\partial z$. Nel caso in questione il momento magnetico dell'ago vale $\vec{\mu} = \mu\left(\frac{1}{2}\,\vec{u}_y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{u}_z\right)$, sicché $U_m(z) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu\mu_0 I/8\pi z$. Di conseguenza

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu\mu_0 I}{8\pi z}\right) = -\frac{\mu\mu_0 I}{8\pi z^2}.$$

c) Se l'ago è in equilibrio deve valere $\vec{M}_{\text{ext}} + \vec{\mu}\times\vec{B} = 0$, con $\vec{\mu} = \mu\vec{u}_x$. Segue

$$\vec{M}_{\text{ext}} = -\mu\vec{u}_x \times \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\,(\vec{u}_x + \vec{u}_y) = -\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi z}\,\vec{u}_z.$$