Compito di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 14/02/2019

Problema 1

Sul piano yz si trova una distribuzione piana infinita di carica con densità superficiale uniforme $4\sigma > 0$ e similmente sul piano xz si trova una distribuzione con densità superficiale -2σ.

a) Si determinino il campo elettrico $\vec{E}(x, y, z)$ e il potenziale $\varphi(x, y, z)$ in tutto lo spazio. Si traccino qualitativamente le linee di campo del campo elettrico nei quattro quadranti del piano xy.

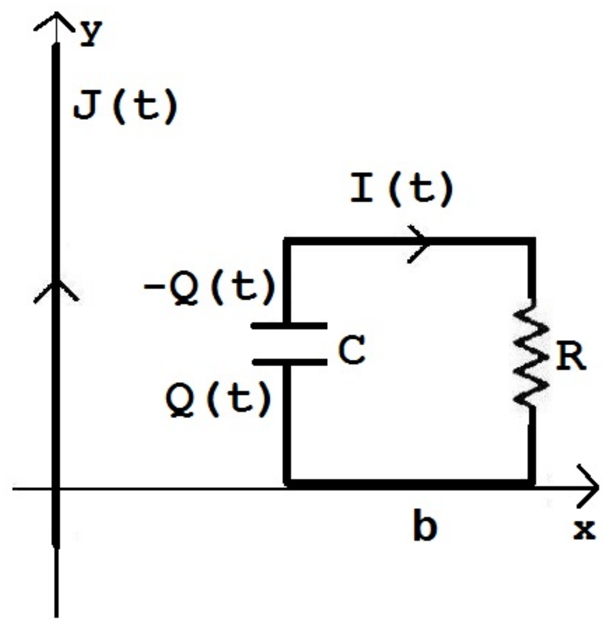
b) Due particelle identiche di carica $q > 0$ sono inizialmente bloccate rispettivamente nelle posizioni $A = (a, a, 0)$ e $B = (-a, a, 0)$, con $a > 0$. Trascurando la forza peso si determini la reazione vincolare $\vec{F}$ esercitata dal fermo che blocca la carica in A.

c) Rimuovendo simultaneamente i fermi che bloccano le due cariche si osserva che la carica partita da B colpisce il piano xz nel punto $C = (-L, 0, 0)$, con $L > 0$. Conoscendo L si determini l'energia cinetica T della carica all'istante dell'impatto. Si trascuri la forza peso.

d) **Facoltativo**: se le cariche di cui al quesito b) sono negative, una volta sbloccate impattano sul piano yz?

Problema 2

In un filo conduttore infinito disposto lungo l'asse y scorre una corrente dipendente dal tempo data da $J(t) = J_0 \cos(\omega t + \varphi)$, riferita al verso delle y crescenti, dove ω e J_0 sono costanti positive e $0 < \varphi < \pi/2$. Nel piano xy è fissata una spira conduttrice quadrata di lato b, resistenza R, capacità C e induttanza trascurabile, avente come vertici i punti $(b, 0, 0)$, $(2b, 0, 0)$, $(2b, b, 0)$, $(b, b, 0)$. La carica della paratia inferiore del condensatore all'istante $t = 0$ vale $Q(0) = 0$.



a) Si determini la forza elettromotrice $\mathcal{E}_\gamma(t)$ indotta nella spira, orientata in senso *orario*, a un generico istante t.

b) Si scriva l'equazione differenziale a cui deve obbedire la carica $Q(t)$ presente sulla paratia inferiore del condensatore e si determini la corrente $I(0)$, orientata come in figura, circolante nella spira all'istante $t = 0$. Tale corrente circola in senso orario o antiorario?

c) Si determini la forza magnetica totale $\vec{F}$ esercitata dal filo sulla spira all'istante $t = 0$, specificando se è attrattiva o repulsiva.

Soluzioni

Problema 1

a) Conoscendo il campo elettrico "$\pm\sigma/2\varepsilon_0$" prodotto da un piano carico infinito si trova

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\big(2\varepsilon(x), -\varepsilon(y), 0\big), \qquad \varphi(x,y,z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\big(2|x| - |y|\big). \tag{1}$$

b) La forza coulombiana agente sulla carica in A è $\vec{F}_\mathrm{c} = q\vec{E}(a,a,0) + q^2(2a,0,0)/4\pi\varepsilon_0(2a)^3$ e quindi

$$\vec{F} = -\vec{F}_\mathrm{c} = \left(-\frac{2q\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{q^2}{16\pi a^2\varepsilon_0}, \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}, 0\right).$$

c) Sfruttando la simmetria delle condizioni iniziali, dalla conservazione dell'energia meccanica totale si ricava ($T = \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2$)

$$0 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)} + 2q\varphi(a,a,0) = 2T + 2q\varphi(L,0,0) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2L)} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{q^2(L-a)}{16\pi\varepsilon_0 aL} + \frac{q\sigma(2L-a)}{\varepsilon_0}.$$

d) Se le particelle hanno carca $-q < 0$, esse non possono raggiungere il piano yz perché in tal caso la forza di repulsione coulombiana risulterebbe infinita. Più concretamete, viste le condizioni iniziali simmetriche delle particelle, i loro moti lungo gli assi x e y sono speculari e disaccoppiati. Lungo l'asse y il loro moto è uniformemente accelerato nel verso delle y crescenti, i.e. $m\ddot{y} = q\sigma/\varepsilon_0$. L'energia meccanica totale conservata del sistema è data da ($x > 0$, $y > 0$)

$$\mathcal{E} = mv^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)} + \frac{2q\sigma}{\varepsilon_0}(2x - y) \equiv mv^2 - \frac{2q\sigma y}{\varepsilon_0} + U(x).$$

Per $x > 0$ l'energia potenziale $U(x)$ relativa al moto lungo l'asse x diverge per $x \to 0$ e per $x \to \infty$, con un unico minimo per $x_0 = \sqrt{q/32\pi\sigma}$, e pertanto lungo l'asse x il moto è confinato a un intervallo e periodico.

Problema 2

a) Nel piano xy il filo genera un campo magnetico ortogonale al piano con componente z data da $B(t,x) = -\mu_0 J(t)/2\pi x$. Il suo flusso attraverso la spira orientata in senso orario è dato dall'integrale

$$\Phi_\gamma(t) = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 J(t)}{2\pi x}\, b\, dx = \frac{(\ln 2)\mu_0 b J(t)}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_\gamma(t) = -\dot{\Phi}_\gamma(t) = \frac{(\ln 2)\mu_0 b\omega J_0 \sin(\omega t + \varphi)}{2\pi}.$$

b) Visto che $I(t) = \dot{Q}(t)$ l'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_\gamma(t) = \frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) \quad \Rightarrow \quad I(0) = \dot{Q}(0) = \frac{\mathcal{E}_\gamma(0)}{R} - \frac{Q_0}{RC} = \frac{(\ln 2)\mu_0 b\omega J_0 \sin\varphi}{2\pi R}.$$

La corrente a $t = 0$ circola dunque in senso orario.

c) Secondo la seconda legge elementare di Laplace le forze magnetiche agenti sui lati della spira paralleli all'asse x si compensano, mentre le forze agenti sui lati rimanenti danno la forza attrattiva

$$\vec{F} = bI(0)\big(B(0,b) - B(0,2b)\big)\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I(0) J(0)}{4\pi}\,\vec{u}_x = -\frac{(\ln 2)\mu_0^2 J_0^2 b\omega \sin\varphi\cos\varphi}{8\pi^2 R}\vec{u}_x.$$