**Compito di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 27/01/2020**

**Problema 1**

Si considerino due distribuzioni filiformi di carica infinitamente estese. La prima è disposta lungo l'asse $x$ con densità lineare di carica $\lambda > 0$ e la seconda lungo l'asse $y$ con densità lineare $-\lambda < 0$.

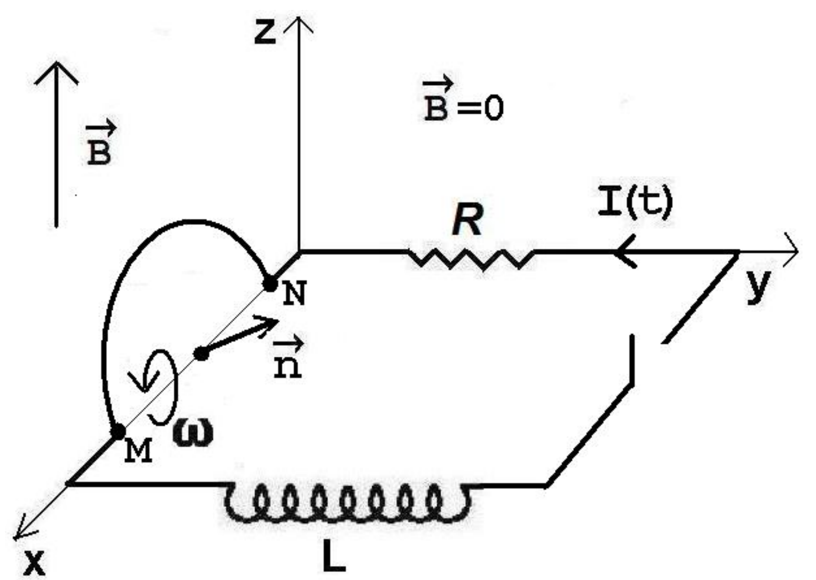
a) Si determini il potenziale elettrostatico $\varphi(\vec{x})$ come funzione delle variabili cartesiane $x$, $y$ e $z$ in tutto lo spazio.

b) Si determinino le componenti cartesiane del campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ in tutto lo spazio.

c) Si assuma che, oltre alle distribuzioni filiformi di carica, vi sia anche un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$. A un certo istante una particella carica attraversa il piano $xy$ con velocità $\vec{v} = (v_0, 2v_0, v_1)$ e accelerazione nulla. Trascurando la forza peso si determini la sua posizione $(x_0, y_0, 0)$ in quell'istante.

**Problema 2**

Nel circuito in figura la semicirconferenza di raggio $r$ ruota con velocità angolare costante $\omega$ attorno al suo diametro fisso $MN$, con verso di rotazione concorde con l'asse $x$. Inizialmente l'interruttore è aperto. Nella regione delle $y$ negative vi è un campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, $B > 0$, mentre nella regione delle $y$ positive il campo magnetico è nullo. All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore e in quell'istante la semicirconferenza giace nel semipiano $xz$, $z > 0$.




a) Si determini la f.e.m. indotta $\varepsilon(t)$, come funzione del tempo, nell'intervallo $0 < t < \pi/\omega$, orientando il circuito in senso *antiorario*. *Suggerimento*: il versore normale alla semicirconferenza, indicato in figura, ha l'espressione generale $\vec{n} = (0, cos(\omega t), sen(\omega t))$.

b) Si scriva l'equazione differenziale che deve soddisfare la corrente $I(t)$, orientata come in figura, nell'intervallo $0 < t < \pi/\omega$ e si determini il valore della sua derivata $\dot{I}(0)$ immediatamente dopo la chiusura del circuito. Immediatamente dopo la chiusura la corrente circola in senso orario o antiorario?

c) Si scriva l'equazione differenziale che deve soddisfare la corrente $I(t)$ nell'intervallo $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$.

## Soluzioni

**Problema 1**

a) Il filo lungo l'asse $x$ crea un campo elettrico con componente radiale $E(r) = \lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ e un potenziale $\varphi(r) = -\lambda \ln r/2\pi\varepsilon_0$, dove $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, con analoghe espressioni per il filo lungo l'asse $y$. Si trova quindi

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{x^2 + z^2}{y^2 + z^2}\right).$$

b)

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-x}{x^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2} - \frac{z}{x^2+z^2}\right).$$

c) Nel piano $xy$ il campo elettrico è dato da

$$\vec{E}(x, y, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 0\right).$$

Affinché l'accelerazione si annulli deve valere $\vec{E}(x_0, y_0, 0) + \vec{v} \times \vec{B} = 0$, ovvero

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, 0\right) + (2v_0B, -v_0B, 0) = 0.$$

Si ricava $x_0 = \lambda/4\pi\varepsilon_0 v_0 B$, $y_0 = \lambda/2\pi\varepsilon_0 v_0 B$.

**Problema 2**

a) Per $0 < t < \pi/\omega$ il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi(t) = \frac{\pi r^2}{2}\,\vec{n}(t)\cdot B\vec{u}_z = \frac{\pi r^2 B sen(\omega t)}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon(t) = -\dot{\Phi}(t) = -\frac{\pi r^2 \omega B cos(\omega t)}{2}.$$

b) Nell'intervallo in questione la corrente deve soddisfare l'equazione

$$\varepsilon(t) = L\dot{I} + RI.$$

Visto che la corrente varia in modo continuo si ha $I(0) = 0$ e dunque

$$\dot{I}(0) = \frac{\varepsilon(0)}{L} = -\frac{\pi r^2 \omega B}{2L} < 0,$$

sicché inizialmente la corrente circola in senso *orario*.

c) Nell'intervallo $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ la spira si trova nella regione delle $y$ positive dove non vi è campo magnetico, sicché si ha $\varepsilon(t) = 0$. L'equazione del circuito è quindi semplicemente $L\dot{I} + RI = 0$, con soluzione

$$I(t) = I\left(\frac{\pi}{\omega}\right) e^{-\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right)R/L}.$$