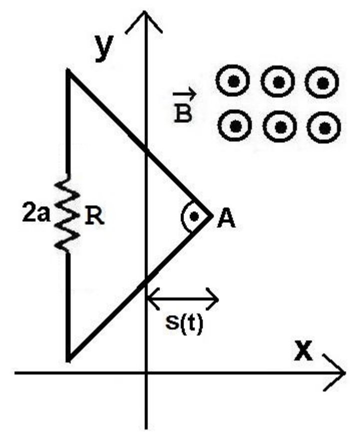
Compito di *Fisica II* – Laurea in Matematica – 30/01/2019

Problema 1

Una spira conduttrice della forma di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa $2a$, massa m e resistenza R è vincolata a muoversi in un piano xy orizzontale mantenendo l'ipotenusa parallela all'asse y. Nella regione delle x positive vi è un campo magnetico $\vec{B} = (0, 0, B)$ costante e uniforme, $B > 0$, mentre nella regione delle x negative il campo è nullo. Sia $s(t)$ la distanza del vertice A del triangolo dall'asse y all'istante t, vedi figura. Si considerino i dati iniziali $s(0) = 0$ e $\dot{s}(0) = v_0 > 0$.



a) Si determini la corrente $I(s, \dot{s})$ circolante nella spira come funzione di s e $\dot{s}$, specificando se immediatamente dopo l'istante $t = 0$ circola in senso orario o antiorario.

b) Si dimostri che s soddisfa un'equazione differenziale della forma

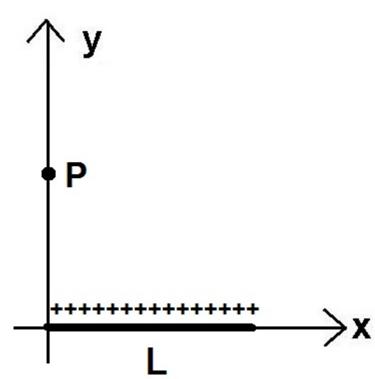
$$\ddot{s} = k\,\dot{s}\,s^2, \tag{1}$$

per un'opportuna costante k, e si determini la velocità $v(s)$ della spira come funzione di s. *Suggerimento*: si risolva l'equazione (1) usando le relazioni $\dot{s} = v$, $\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \dot{s}\,\frac{dv}{ds}$.

c) Si supponga che la velocità iniziale v_0 della spira sia sufficientemente elevata, tale che a un certo istante essa supera l'asse delle y. Si determini l'energia totale $\mathcal{E}_{\mathrm{J}}$ dissipata per effetto Joule nella resistenza R. *Suggerimento*: si esegua il bilancio energetico.

Problema 2

Su un'asta di lunghezza L disposta lungo l'asse x con un estremo nell'origine si trova una distribuzione lineare non uniforme di carica con densità lineare $\lambda(x) = kx$, $k > 0$.



a) Si determini il potenziale $\varphi(y)$ in un generico punto $P = (0, y, 0)$ dell'asse y, tracciandone qualitativamente il grafico per $y \in \mathbb{R}$.

b) Si determini la componente $E_y(y)$ del campo elettrico in P, verificando che abbia i corretti andamenti asintotici per $y \to \pm\infty$.

c) Una particella con carica $-q < 0$ e massa m, vincolata a muoversi sull'asse y, viene lanciata dall'origine $(0, 0, 0)$ verso le y positive. Qual è la minima velocità v_{M} con cui occorre lanciarla affinché possa raggiungere l'infinito? Si trascuri la forza peso.

Soluzioni

Problema 1

a) Orientando la spira in senso orario si ha $\Phi = -s^2 B$ e $\varepsilon = -\dot{\Phi} = 2s\dot{s}B$. Chiamando I la corrente che circola in senso orario l'equazione del circuito diventa allora $\varepsilon = RI$, ovvero

$$I(s, \dot{s}) = \frac{2s\dot{s}B}{R} > 0.$$

La corrente circola dunque in senso *orario*, in accordo con la *legge di Lenz*.

b) I due tratti di spira che si trovano nella regione $x > 0$ sono soggetti a forze magnetiche secondo la seconda legge elementare di Laplace, la cui somma vettoriale dà $\vec{F} = -2IBs\,\vec{u}_x = -(4B^2s^2\dot{s}/R)\,\vec{u}_x$. Dall'equazione di Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ si ricava allora

$$\ddot{s} = k\,\dot{s}\,s^2, \qquad k = -\frac{4B^2}{mR},$$

ovvero $dv/ds = ks^2$. La soluzione è dunque

$$v(s) = v_0 + \frac{ks^3}{3} = v_0 - \frac{4B^2s^3}{3mR}.$$

c) Se v_0 è sufficientemente grande, ovvero tale $v(a) = v_0 - 4B^2a^3/3mR > 0$, la spira supera l'asse y e, poiché per $s > a$ la forza elettromotrice indotta si annulla, prosegue con la velocità costante $v(a) < v_0$. L'energia dissipata per effetto Joule durante il transito della spira dal semipiano delle $x < 0$ a quello delle $x > 0$ uguaglia la diminuzione della sua energia cinetica

$$\mathcal{E}_\mathrm{J} = \frac{1}{2}\,mv_0^2 - \frac{1}{2}\,mv^2(a) = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \left(v_0 - \frac{4B^2a^3}{3mR}\right)^2\right).$$

Problema 2

a) Un tratto dell'asta lungo dx genera nel punto P il potenziale $d\varphi(y) = kxdx/4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}$. Integrando si ottiene

$$\varphi(y) = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{y^2+L^2} - |y|\right).$$

b) Si ha

$$E_y(y) = -\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\left(\mathrm{sgn}(y) - \frac{y}{\sqrt{y^2+L^2}}\right) = \frac{k\,\mathrm{sgn}(y)}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+L^2/y^2}}\right).$$

Dall'espansione $1/\sqrt{1+u} = 1 - \frac{u}{2} + O(u^2)$, per $|y| \to \infty$ si trova

$$E_y(y) \approx \frac{kL^2\,\mathrm{sgn}(y)}{8\pi\varepsilon_0 y^2} = \frac{(\frac{kL^2}{2})\,y}{4\pi\varepsilon_0|y|^3},$$

in accordo con il fatto che la carica totale dell'asta vale $Q = \int_0^L kxdx = kL^2/2$.

c) Visto che $\varphi(\infty) = 0$ deve valere

$$\frac{1}{2}\,mv_\infty^2 = \frac{1}{2}\,mv^2(0) - q\varphi(0) \geq 0 \quad \to \quad v(0) \geq \sqrt{\frac{qkL}{2\pi\varepsilon_0 m}} = v_\mathrm{M}.$$