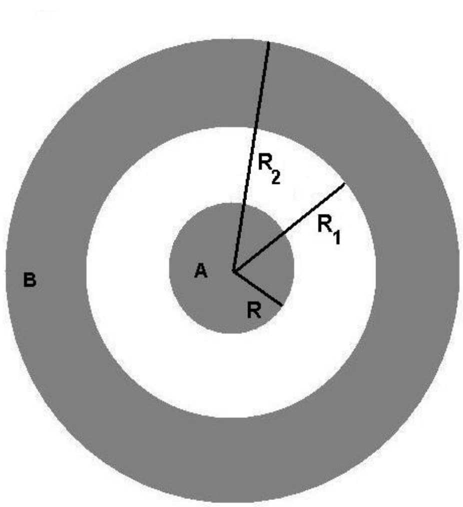
Conduttori e correnti

Problema 1

Si determini l'energia elettrostatica di una carica Q distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio R
a) considerando la formula $U_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, d^3x$,
b) considerando la formula $U_2 = \frac{1}{2} \int \varphi \, \rho \, d^3x$. I risultati devono coincidere?
c) Come cambiano le risposte alle domande precedenti se la carica Q è distribuita in modo uniforme su tutta la palla di raggio R?
d) A un certo istante la distribuzione di cui al punto c) viene "liberata" e per repulsione elettrostatica si ridistribuisce sulla superficie della sfera. Quanto vale il lavoro L compiuto dal campo elettrico durante questo processo?

Problema 2

Un conduttore sferico A di raggio R si trova all'interno di un conduttore sferico cavo B con raggi $R_1 < R_2$, vedi figura. Sul conduttore A si trova la carica Q_A e sul conduttore B si trova la carica Q_B.



a) Si determini la distribuzione di carica sui due conduttori.
b) Si determini il campo elettrico in tutto lo spazio.
c) Si determini la differenza di potenziale tra i conduttori $\varphi(B) - \varphi(A)$.
d) Si determinino le differenze di potenziale $\varphi(B) - \varphi(\infty)$ e $\varphi(A) - \varphi(\infty)$.
e) Mettendo a terra il conduttore B, come cambiano le risposte alle domande precedenti?
f) Cosa succede se invece di collegare a terra il conduttore B, si collegano i due conduttori con un sottile filo?

Problema 3

Due sfere conduttrici di raggi $R_1 \equiv 3R$ e $R_2 = 2R$ sono poste a una distanza $d \gg R$. Sulla sfera 1 viene depositata una carica Q e successivamente le due sfere vengono collegate attraverso un filo conduttore molto sottile.
a) Si determinino le cariche Q_1 e Q_2 sulle sfere dopo il collegamento.

b) Si determini il potenziale φ_S delle sfere rispetto al potenziale dell'infinito.
c) Si determini l'energia $\Delta\varepsilon$ dissipata durante il collegamento.
d) Una carica di prova si trova in equilibrio a una distanza di $r = 50cm > R_1$ dal centro della sfera 1. In quale posizione si trova? Si determini il valore numerico di d. L'equilibrio è stabile? La risposta all'ultima domanda dipende dal segno della carica?

Problema 4
a) Si dimostri che un disco uniformemente carico con asse parallelo al versore $\vec{n}$ e con distribuzione superficiale di carica σ crea nelle vicinanze del suo centro il campo elettrico $\vec{E} = \pm\sigma\vec{n}/2\varepsilon_0$, indipendente dal raggio del disco. *Suggerimento*: un disco uniformemente carico di raggio R crea sul suo asse il noto potenziale $\varphi(z) = \sigma(\sqrt{z^2 + R^2} - |z|)/2\varepsilon_0$.
b) Si concluda che un generico campo elettrostatico nel passaggio attraverso una superficie carica in un punto P subisce la discontinuità $\Delta\vec{E} = \sigma(P)\vec{n}/\varepsilon_0$, $\vec{n}$ essendo la normale alla superficie in P e $\sigma(P)$ la densità superficiale di carica in P.
c) Si verifichi la proprietà generale di cui al quesito precedente nel caso di una distribuzione i) sferica, ii) piana, iii) cilindrica.

Problema 5
Si può dimostrare che un campo elettrico costante e uniforme $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{u}$, con $\vec{u}$ versore dell'asse z, induce su una biglia conduttrice di raggio r centrata nell'origine avente carica totale nulla la densità superficiale di carica non uniforme

$$\sigma(\vartheta) = 3\varepsilon_0\mathcal{E}\, cos\vartheta, \tag{1}$$

dove ϑ è l'angolo tra il vettore radiale $\vec{r}$ e l'asse z. Ciò significa in particolare che questa distribuzione crea all'interno della biglia un campo elettrico *costante e uniforme*.
a) Si verifichi che il *momento di dipolo* associato alla distribuzione $\sigma(\vartheta)$ vale

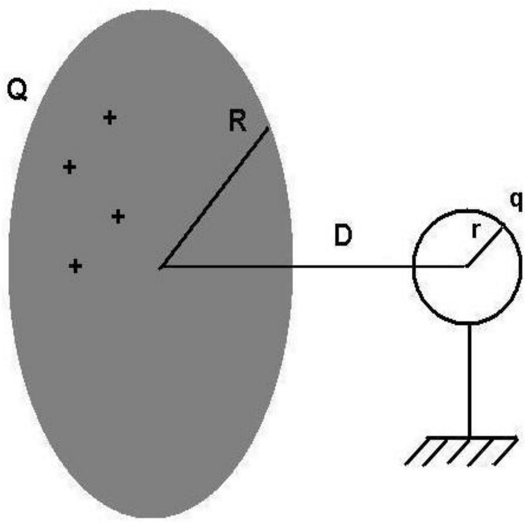
$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 r^3\vec{\mathcal{E}}.$$

b) Si dimostri che la carica sui due emisferi vale rispettivamente

$$Q_\pm = \pm3\pi\varepsilon_0 r^2\mathcal{E}.$$

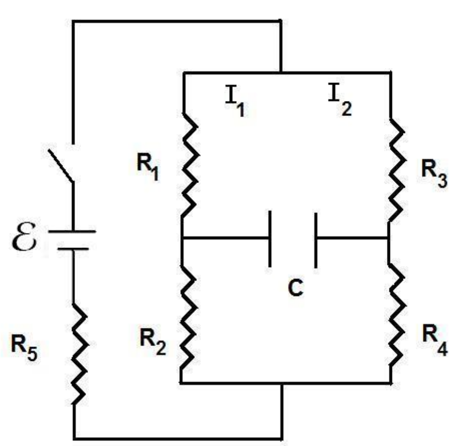
c) Si calcoli la distanza d tra i *centri* delle cariche positive e negative.
d) Si determini il campo elettrico $\vec{E}_0$ generato dalle cariche positive nel centro della biglia.
e) Si determini il campo elettrico *totale* $\vec{E}(\vec{r})$ in un generico punto situato nelle immediate vicinanze della superficie "esterna" della biglia.

Problema 6
Il centro di una biglia conduttrice di raggio r si trova a una distanza D dal centro di un disco isolante di raggio R uniformemente carico, con carica totale $Q > 0$. Il centro della biglia si trova sull'asse del disco, vedi figura. Si supponga che sia $R \ll D$, $r \ll D$.



a) Supponendo che inizialmente la biglia sia isolata – con carica totale nulla – si determini il valore massimo σ_M della densità superficiale di carica sulla superficie della biglia, giustificando le approssimazioni fatte. *Suggerimento*: si ricorra all'espressione (1) del Problema 5.
b) Si determini la carica totale q che fluisce sulla biglia quando la si collega a terra, considerando note solo le quantità Q e D/r.
c) Si determini la distribuzione superficiale di carica $\sigma(\vartheta)$ presente sulla superficie della biglia dopo che è stata messa a terra, dove ϑ è l'angolo tra il raggio vettore $\vec{r}$ della biglia e l'asse del disco.
d) Come cambiano le risposte ai quesiti precedenti se valgono invece le relazioni $R = D$, $r \ll D$?

Problema 7
Nel circuito in figura i vari componenti hanno i valori $\mathcal{E} = 25V$, $C = 3\mu F$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 5\Omega$. Si supponga che inizialmente il condensatore sia scarico e che l'interruttore venga chiuso all'istante $t = 0$.

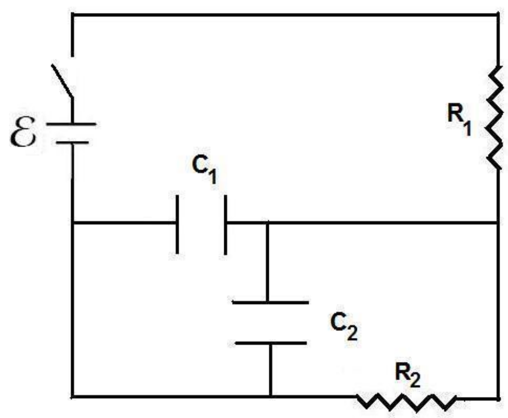


a) Si calcolino i valori delle correnti I_1 e I_2 a regime, ovvero nel limite di $t \to \infty$.
b) Si determini il valore a regime Q_∞ della carica del condensatore.

c) Raggiunto il regime, a un certo istante t_1 si sconnette il generatore riaprendo l'interruttore. Si determini l'istante t_2 al quale la carica del condensatore vale $Q_\infty/10$.

Problema 8

Nel circuito in figura si considerino noti i valori dei componenti $\mathcal{E}$, C_1, C_2, R_1, R_2. Si supponga che i condensatori siano inizialmente scarichi e che all'istante $t = 0$ si chiuda l'interruttore.



a) Si disegni un opportuno circuito equivalente.
b) Si determini la differenza di potenziale V_0 ai capi di R_2 all'istante $t = 0$.
c) Si determini la differenza di potenziale V_∞ ai capi di R_2 a regime.
d) Si determini la carica $Q_{2\infty}$ del condensatore C_2 a regime.
e) Si determini la carica totale $Q(t)$ dei condensatori a un generico istante t.

Soluzioni

Problema 1
b) Vale in tutta generalità $U_1 = U_2$.
c) Se la carica è distribuita in modo uniforme in tutta la palla il campo elettrico per $r > R$ mantiene l'espressione $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ della distribuzione superficiale, mentre per $r < R$ non è più zero, valendo in modulo $E_i(r) = Qr/4\pi\varepsilon_0 R^3$. L'energia elettrostatica è quindi maggiore di quella della distribuzione superficiale della quantità $U_i = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r<R} E_i^2(r) d^3x$.
d) Vale $L = -\Delta U_e = -[U_1 - (U_1 + U_i)] = U_i > 0$.

Problema 2
a) La carica Q_A si dispone sulla sfera di raggio R. Considerando una superficie gaussiana sferica con raggio r compreso tra R_1 ed R_2 si trova che sulla sfera di raggio R_1 si dispone la carica $-Q_A$. Conseguentemente sulla sfera di raggio R_2 si dispone la carica $Q_A + Q_B$.
e) Se si mette il conduttore B a terra il suo potenziale $\varphi_B = \varphi(R_2)$ deve uguagliare il potenziale dell'infinito $\varphi(\infty)$. Chiamando Q_T la carica totale dei due conduttori, per $r > R_2$ il campo elettrico è dato da $E(r) = Q_T/4\pi\varepsilon_0 r^2$ e il potenziale da $\varphi(r) = Q_T/4\pi\varepsilon_0 r$. Affinché si abbia $\varphi(\infty) = \varphi(R_2)$ deve quindi valere $Q_T = 0$. Il conduttore B cede quindi carica alla "terra" fino a quando la sua carica raggiunge il valore a $Q_B = -Q_A$, che si dispone tutta sulla sfera di raggio R_1.
f) Se si collegano i due conduttori essi equivalgono a un unico conduttore con potenziale φ_0. Affinché valga $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_0$ la carica totale $Q_A + Q_B$ deve disporsi sulla sfera di raggio R_2.

Problema 3
a) I potenziali delle due sfere devono essere uguali e, visto che $d \gg R$, le due distribuzioni possono essere assunte a simmetria sferica e il potenziale creato dalla sfera 1 (2) sulla sfera 2 (1) può essere trascurato. Vale quindi

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \qquad Q_1 + Q_2 = Q.$$

c) L'energia $\Delta\varepsilon$ dissipata durante il collegamento è ugugale alla differenza delle energie elettrostatiche prima e dopo il collegamento. Per valutare l'energia elettrostatica dopo il collegamento può essere conveniente usare la formula generale (si veda il Problema 1)

$$U_e = \frac{1}{2}\int \varphi(\vec{x})\rho(\vec{x})\, d^3x.$$

Problema 5
a) Per una distribuzione continua di carica il momento di dipolo $\vec{p} = \sum_j q_j \vec{r}_j$ assume la forma $\vec{p} = \int \vec{x}\,\rho(\vec{x})\, d^3x = \int \vec{x}\, dq(\vec{x})$. Nel caso in questione per motivi di simmetria $\vec{p}$ ha la forma

$\vec{p} = (0,0,p_z)$ e vale $(z(\vartheta) = rcos\vartheta)$

$$p_z = 2\int z(\vartheta)\,\sigma(\vartheta)r^2 d\Omega = 2r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sigma(\vartheta)cos\vartheta sen\vartheta d\vartheta.$$

b) $Q_\pm = \pm \int_{0<\vartheta<\pi/2} \sigma(\vartheta) r^2 d\Omega$.
c) $\vec{p} = Q_+ \vec{d}$.
d) All'interno della biglia il campo elettrico totale è nullo. Per motivi di simmetria vale quindi $\vec{E}_0 = -\vec{\mathcal{E}}/2$.
e) In base al risultato generale del quesito b) del Problema 4, visto che all'interno della biglia il campo totale è nullo si ha $\vec{E}(\vec{r}) = \sigma(\vartheta)\,\vec{n}/\varepsilon_0$, dove $\vec{n}$ è il versore radiale uscente.

Problema 6
a) Per $D \gg R$ il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ generato dal disco nel centro della biglia può essere approssimato con quello di una carica puntiforme Q posta nel centro del disco, ovvero $\vec{\mathcal{E}} \approx Q\vec{u}/4\pi\varepsilon_0 D^2$. Se vale inoltre $r \ll D$ tale campo è praticamente costante su tutta la biglia. Dalla (1) del Problema 5 si trova allora

$$\sigma_M = 3\varepsilon_0 \mathcal{E} = \frac{3Q}{4\pi D^2}.$$

b) Essendo un conduttore la biglia costituisce un volume equipotenziale. Per determinare il suo potenziale φ_i prima della messa a terra possiamo allora valutarlo, ad esempio, nel suo centro C. Il disco crea in C il potenziale $\varphi_D = Q/4\pi\varepsilon_0 D$, mentre la distribuzione $\sigma(\vartheta)$ per motivi di simmetria in C crea potenziale nullo. La biglia prima della messa a terra possiede quindi il potenziale $\varphi_i = Q/4\pi\varepsilon_0 D$.

Se la biglia viene messa a terra acquista una carica totale $q < 0$ di modo tale da costituire di nuovo un volume equipotenziale, ma con potenziale $\varphi_f = 0$. Ciò è possibile solo se q si distribuisce sulla superficie della biglia in modo isotropo, creando in tutta la biglia il potenziale costante $\varphi_q = q/4\pi\varepsilon_0 r$. Deve valere

$$\varphi_f = \varphi_q + \varphi_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 D} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{r}{D}\,Q.$$

c) Sfruttando l'equazione (1) del Problema 5 si ricava

$$\sigma(\vartheta) = -3\varepsilon_0 \mathcal{E} cos\vartheta + \frac{q}{4\pi r^2} = -\frac{Q}{4\pi D r}\left(\frac{3r}{D}\,cos\vartheta + 1\right),$$

dove $\vartheta = 0$ corrisponde al punto della biglia più vicino al disco.
d) Per $D = R$ il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ generato dal disco deve essere determinato calcolando il campo esatto generato dal disco sul suo asse.

Problema 7
a) A regime la carica del condensatore è costante, sicché non vi passa corrente; per quanto riguarda il calcolo delle correnti il condensatore non gioca dunque alcun ruolo.

b) È sufficiente calcolare la differenza di potenziale ai capi del condensatore, usando le leggi di Kirchhoff.
c) Una volta aperto l'interruttore tutte le correnti vanno quasi-istantaneamente a zero e il processo che si innesca è equivalente alla scarica di un condensatore attraverso un'opportuna resistenza equivalente R_{eq}.

Problema 8

a) Gli elementi C_1, C_2 ed R_2 sono in parallelo fra loro e sono a loro volta in serie con R_1. In particolare i due condensatori equivalgono a un condensatore con capacità equivalente $C = C_1 + C_2$.
b) $V_0 = 0$, poiché inizialmente i condensatori sono scarichi e la differenza di potenziale ai capi di R_2 deve uguagliare quella dei condensatori.
c) A regime per i condensatori non passa corrente. Dalle leggi di Kirchhoff si trova $V_\infty = \mathcal{E} R_2/(R_1 + R_2)$.
d) $Q_{2\infty} = C_2 V_\infty$.
e) Occorre risolvere l'equazione del circuito equivalente completo (si veda il problema svolto in aula).