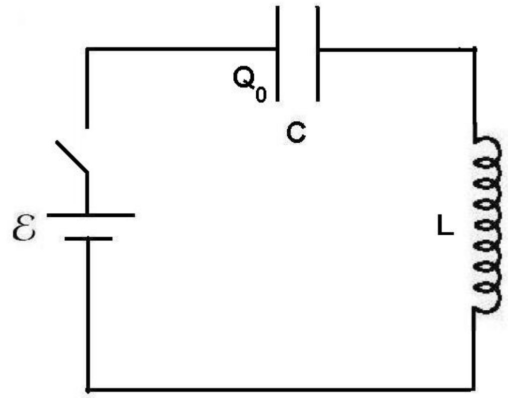
Problemi di Elettrodinamica

Problema 1

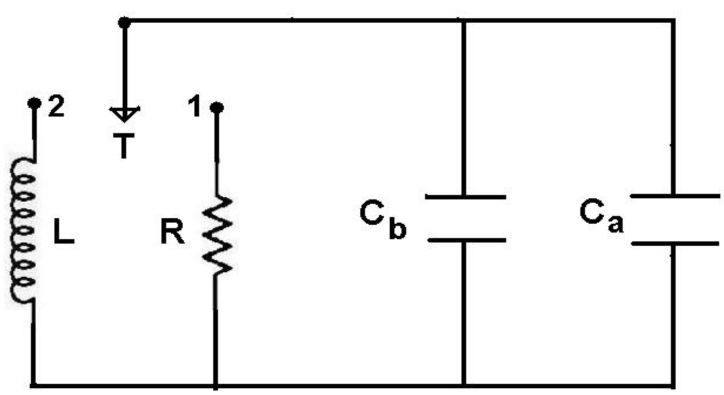
Nel circuito in figura l'induttanza vale $L = 10mH$, la capacità $C = 5\mu F$, e $\mathcal{E} = 6V$. A interruttore aperto sul condensatore si trova la carica $Q_0 = 20\mu C$, e all'istante iniziale $t = 0$ l'interruttore viene chiuso.



a) Quanto vale la forza elettromotrice $\mathcal{E}_L$ agente sull'induttore all'istante iniziale?
b) Si determini il periodo T con cui oscilla la corrente.
c) Si determini la carica $Q(t)$ presente sul condensatore a un generico istante t. Quanto valgono le cariche massima e minima Q_+ e Q_- del condensatore?
d) Quanto vale l'energia massima U_L^{max} immagazzinata nell'induttore?
e) Si determinino l'energia $U_\mathcal{E}$ fornita dal generatore tra gli istanti $t = 0$ e $t = T/4$, e le energie U_C ed U_L possedute dal condensatore e dall'induttore all'istante $t = T/4$. Che relazione sussiste tra $U_\mathcal{E}$, U_L ed U_C?
f) Come cambiano le risposte alla domanda precedente se si considera l'istante $t = T/2$?
g) Assegnati $\mathcal{E}$ e C, esiste un valore di Q_0 per cui la corrente è nulla per ogni t?

Problema 2

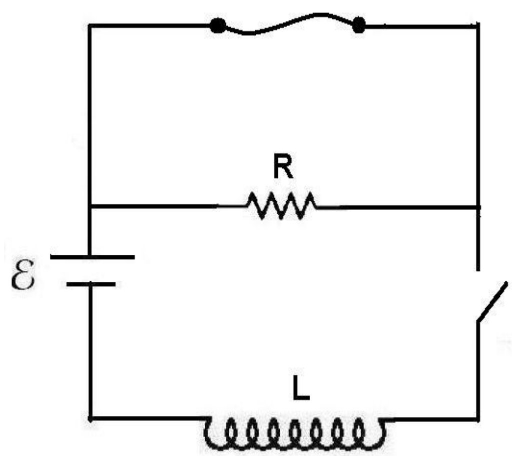
Nel circuito in figura i valori dei componenti sono $R = 100\Omega$, $C_a = 2.5\mu F$, $C_b = 1\mu F$, $L = 1.2mH$. All'istante $t = 0$ l'interruttore si trova nella posizione 1 e l'energia elettrostatica totale presente sui due condensatori vale $U_0 = 90\mu J$.



a) Si determini la corrente I_0 che attraversa il resistore all'istante $t = 0$.
b) A quale istante t_1 l'energia dei condensatori si è ridotta a $U_0/2$?
c) Quanto vale all'istante t_1 la differenza di potenziale V_1 ai capi dei condensatori?
d) All'istante t_1 l'interruttore T viene spostato nella posizione 2. Si determini la carica totale $Q(t)$ presente sui condensatori a un generico istante t.
e) A quale istante t_2 l'energia dei condensatori diventa per la prima volta $U_0/4$?
f) Quanto vale all'istante t_2 l'energia U_L immagazzinata nell'induttore?
g) Quanto vale la corrente massima I_M passante per l'induttore?

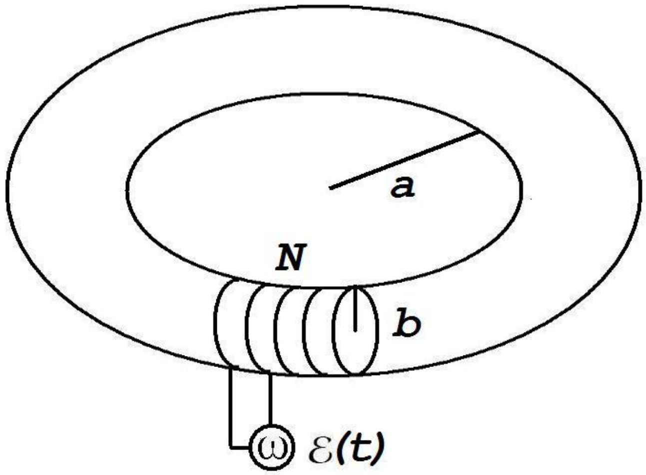
Problema 3
Dati due induttori con induttanze L_1 ed L_2 si determinino i valori delle induttanze equivalenti quando gli induttori sono collegati rispettivamente in serie e in parallelo, motivando le risposte.

Problema 4
Nel circuito in figura l'elemento che si trova nel ramo superiore è un fusibile ideale con corrente di soglia $I_f = 3A$. Esso presenta resistenza nulla finché la corrente che lo attraversa rimane inferiore a I_f. Se a un certo istante la corrente supera invece I_f il fusibile "salta", e da tale istante in poi presenta una resistenza infinita. I valori degli altri componenti sono $L = 5H$, $R = 15\Omega$, $\mathcal{E} = 10V$. Si supponga che l'interruttore venga chiuso all'istante $t = 0$.



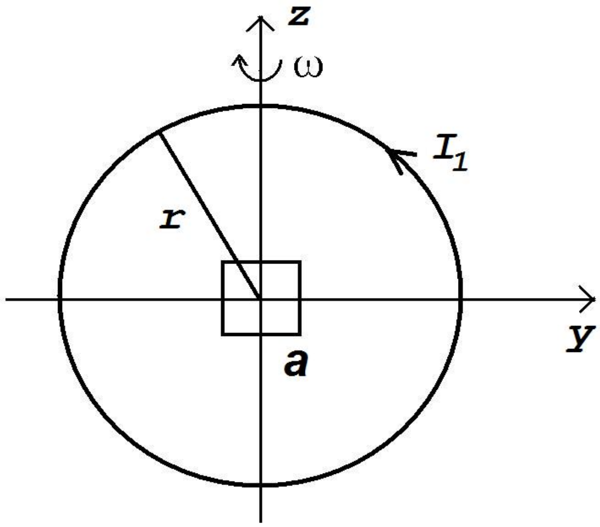
a) Si determinino le correnti $I_R(t)$ e $I_L(t)$ che attraversano il resistore e l'induttore prima che salti il fusibile.
b) Si determini l'istante t_0 in cui salta il fusibile.
c) Quanto vale la corrente I_∞ che attraversa la resistenza a regime, ovvero, per $t \to \infty$?
d) Si determini la corrente $I(t)$ che attraversa l'induttore nell'intervallo $0 < t < \infty$, tracciandone il grafico.

Problema 5
Un solenoide toroidale è formato da $N = 1000$ spire circolari di filo di rame avvolte a forma di elica su un supporto isolante con raggi $a = 50cm$ e $b = 2cm$, vedi figura. Il raggio del filo è $l = 0.5mm$ e la resistività del rame è $\rho = 1.6 \cdot 10^{-8}\Omega m$. Il solenoide viene chiuso su un generatore di f.e.m. alternata data da $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\, sen(\omega t)$, con $\mathcal{E}_0 = 16V$, $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = 50Hz$. Si tenga conto che $b \ll a$.



a) Quanto vale la resistenza R del solenoide?
b) Quanto vale l'induttanza L del solenoide?
c) Si determini l'andamento della corrente $I(t)$ a regime, ovvero, per $t \to \infty$.
d) Si determini lo sfasamento φ tra la corrente e la f.e.m. applicata.
e) Si determini la potenza media w_m dissipata nel solenoide.

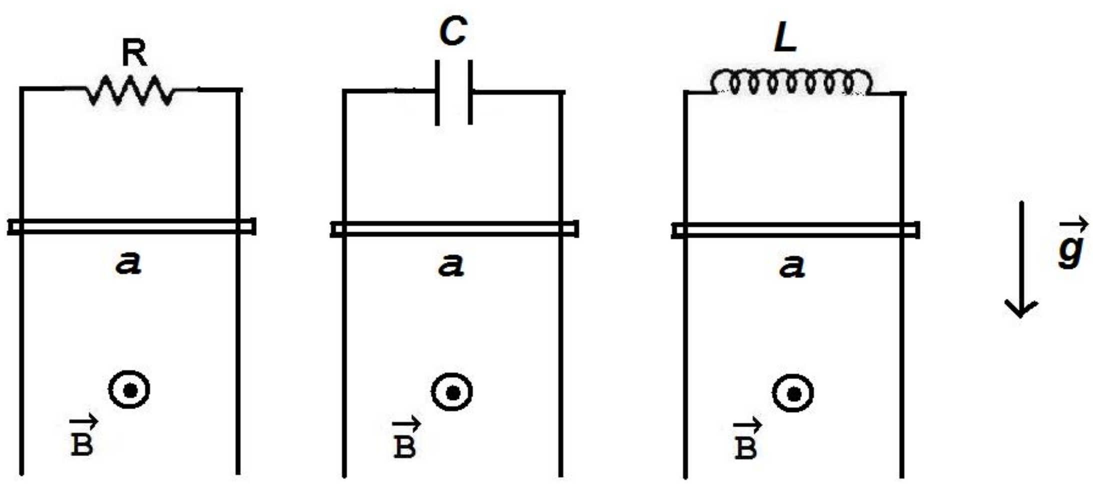
Problema 6
Una spira circolare di raggio $r = 40cm$ è percorsa da una corrente $I_1 = 1A$ tenuta costante da un generatore. Un motore tiene la spira in rotazione con velocità angolare ω costante attorno a un suo diametro appartenente all'asse z. Al centro della spira si trova un circuito quadrato formato da filo di aluminio posto nel piano (yz), tenuto fermo da un supporto. Il lato del quadrato è $a = 1cm$, la sezione del filo è $\Sigma = 0.25mm^2$ e la resistività dell'aluminio è $\rho = 2.8 \cdot 10^{-8}\Omega m$. Si trascurino gli effetti di autoinduzione del circuito.



a) Si determini la resistenza R del circuito.
b) Si determini il modulo del campo magnetico B_0 creato dalla spira nella regione dove si trova il circuito.
c) Quanto deve valere ω affinché la corrente massima circolante nel circuito valga $I_0 = 0.1mA$?

d) Si supponga d'ora in poi che la corrente massima del circuito sia I_0. Quanto vale il momento meccanico massimo M esercitato dal supporto sul circuito?
e) Si supponga che la resistenza della spira sia $R_1 = 0.5\Omega$. Qual è l'energia totale media $\langle w \rangle$ che occorre fornire nell'unità di tempo per mantenere la spira in rotazione con velocità angolare costante e per mantenere la sua corrente I_1 costante?

Problema 7
Nei circuiti in figura un'asta conduttrice di massa m e lunghezza a è libera di scivolare lungo due guide verticali anch'esse conduttrici, mantenendosi sempre orizzontale. Il sistema è immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante ortogonale all'asta e alle guide, con verso uscente dal foglio. Nel tratto orizzontale fisso del circuito sono inseriti rispettivamente un resistore, un condensatore e un induttore. Si assuma che le guide e l'asta abbiano resistenza trascurabile, e si considerino note m, a, B, e rispettivamente R, C ed L. Si supponga che all'istante $t = 0$ l'asta venga lasciata cadere con velocità iniziale nulla. Si risponda alle seguenti domande per ciascuno dei tre casi.

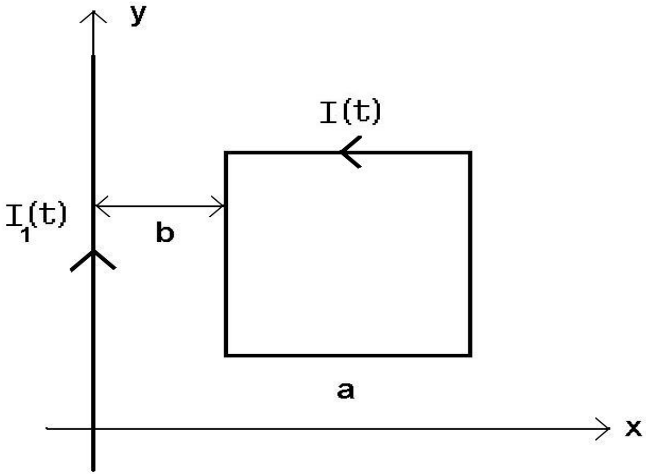


a) Immediatamente dopo l'istante iniziale la corrente scorre in verso orario o antiorario? Tale verso cambia durante il moto?
b) Indicando con x l'asse verticale discendente e considerando la condizione iniziale $x(0) = 0$ si determinino a un generico istante t la velocità $v(t)$ e la legge oraria $x(t)$ dell'asta, e la corrente $I(t)$. Qual è il comportamento asintotico della corrente?
c) Si esegua il bilancio energetico del sistema. In particolare si dica se l'energia meccanica dell'asta $\mathcal{E}_m = mv^2/2 - mgx$ si conserva durante il moto. In caso contario si dica in quale altra forma l'energia compare, quantificando la risposta.

Problema 8
Un filo conduttore infinito disposto lungo l'asse y è percorso da una corrente variabile nel tempo data da,

$$I_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0, \\ \alpha t, & \text{per } t > 0, \quad \alpha = 1.5A/s. \end{cases} \tag{1}$$

Una sottile bobina è formata da $N = 100$ spire quadrate di lato $a = 5cm$ praticamente sovrapposte. La bobina è fissa e giace nel piano (x, y) con due lati paralleli al filo. Il lato più vicino al filo dista $b = 25cm$ dall'asse y. La bobina ha induttanza $L = 1.3 \cdot 10^{-2} H$ e resistenza $R = 2.5\Omega$.



a) Si calcoli il coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti. [Suggerimento: M è definito attraverso $|\Phi(\vec{B})| = MI_1$, dove $\vec{B}$ è il campo magnetico generato dal filo, I_1 la corrente del filo e $\Phi(\vec{B})$ il flusso di $\vec{B}$ attraverso la bobina.]
b) Si determini la f.e.m. $\mathcal{E}$ indotta nella bobina dalla sola corrente $I_1(t)$ del filo.
c) Si determini la corrente $I(t)$ che circola nella bobina a un generico istante t.
d) Se determini il valore a regime U dell'energia del campo magnetico generato dalla sola bobina.
e) Si determini modulo e direzione della reazione vincolare $\vec{F}$ esercitata dal supporto sulla bobina all'istante $t_1 = 10s$.
f) Si determini il coefficiente di mutua induzione usando l'espressione generale,

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{2}$$

Problema 9
In un solenoide lineare infinito di raggio R con n avvolgimenti per unità di lungezza passa una corrente dipendente dal tempo della forma $I(t) = \alpha t$, con α costante positiva. Si supponga che l'asse del solenoide coincida con l'asse z.
a) Applicando la regola del flusso si dimostri che il campo elettrico indotto è dato,

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n \alpha}{2}\,(y, -x, 0), & \text{per } r < R, \\ \dfrac{\mu_0 n \alpha R^2}{2r^2}\,(y, -x, 0), & \text{per } r > R, \end{cases} \tag{3}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
b) Si verifichi che i campi elettrici e magnetici soddisfano le equazioni di Maxwell complete,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

considerando le prime tre in forma differenziale e l'ultima in forma integrale.
c) Si determinino un potenziale scalare $\varphi(t, \vec{x})$ e un potenziale vettoriale $\vec{A}(t, \vec{x})$.
d) Si supponga che una particella di carica q sia vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio $r > R$. Si dimostri che durante ogni ciclo la sua energia cinetica aumenta della stessa quantità ΔT, e che questa quantità è indipendente da r.

Problema 10
Si consideri il campo elettromagnetico,

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = -\frac{1}{t}\, f(t, r), \tag{5}$$

$$B_x = -\frac{y}{r^2}\, f(t, r), \quad B_y = \frac{x}{r^2}\, f(t, r), \quad B_z = 0, \tag{6}$$

dove,

$$f(t, r) = \frac{\mu_0 I_0 H(ct - r)}{2\pi \sqrt{1 - \dfrac{r^2}{c^2 t^2}}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

e $H(\,\cdot\,)$ indica la funzione di Heaviside, ovvero, $H(u) = 0$ per $u < 0$, $H(u) = 1$ per $u \geq 1$. I_0 è una quantità positiva con le dimensioni di una corrente.
a) Si determinino dei potenziali $\varphi(t, \vec{x})$ e $\vec{A}(t, \vec{x})$.
b) Si verifichi che i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ soddisfano le equazioni di Maxwell, e si determinino la densità di carica $\rho(t, \vec{x})$ e la densità di corrente $\vec{j}(t, \vec{x})$ che li generano. [Suggerimento: può essere conveniente considerare l'equazione di Ampere–Maxwell in forma integrale.]
c) Si dia un'interpretazione fisica dei campi dati in (5) e (6).

Soluzioni

Problema 1

a) Dall'equazione della maglia all'istante iniziale si trova $\mathcal{E}_L = -L dI/dt = Q_0/C - \mathcal{E}$.

b) L'equazione della maglia a un istante generico è

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} + L\,\frac{dI}{dt}. \tag{7}$$

Derivandola rispetto al tempo e tenendo conto che $I = dQ/dt$ si ottiene

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega^2 I = 0, \quad \text{dove} \quad \omega \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Quindi $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$.

c) La (7) può essere riscritta come

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2\,Q = \frac{\mathcal{E}}{L},$$

con soluzione generale $Q(t) = \mathcal{E}C + c_1\,cos(\omega t + c_2)$. Dalle condizioni iniziali $Q(0) = Q_0$ e $\frac{dQ}{dt}(0) = I(0) = 0$ si ricava $c_1 = Q_0 - \mathcal{E}C$, $c_2 = 0$, sicché

$$Q(t) = \mathcal{E}C + (Q_0 - \mathcal{E}C)\,cos(\omega t). \tag{8}$$

$Q(t)$ oscilla quindi tra le cariche minima e massima $Q_- = Q_0 = 20\mu C$, $Q_+ = 2\mathcal{E}C - Q_0 = 40\mu C$.

d) Derivando la (8) si ricava $I(t) = I_0\,sen(\omega t)$, con $I_0 = \omega(\mathcal{E}C - Q_0)$. Di conseguenza $U_L^{max} = LI_0^2/2$.

e)

$$U_\mathcal{E} = \int_0^{T/4} \mathcal{E}\,I(t)\,dt = \frac{\mathcal{E}I_0}{\omega}, \qquad U_C = \frac{Q^2(T/4)}{2C} = \frac{1}{2}\,C\,\mathcal{E}^2, \qquad U_L = \frac{1}{2}\,L\,I_0^2.$$

Visto che inizialmente il condensatore possiede l'energia elettrostatica $Q_0^2/2C$ vale

$$U_\mathcal{E} = U_L + U_C - \frac{Q_0^2}{2C}.$$

f)

$$U_\mathcal{E} = \int_0^{T/2} \mathcal{E}\,I(t)\,dt = \frac{2\mathcal{E}I_0}{\omega}, \qquad U_C = \frac{Q^2(T/2)}{2C} = \frac{(2\mathcal{E}C - Q_0)^2}{2C}, \qquad U_L = 0.$$

$$U_\mathcal{E} = U_L + U_C - \frac{Q_0^2}{2C}.$$

g) $Q_0 = \mathcal{E}C$.

Problema 2

a) I due condensatori sono in parallelo con capacità equivalente $C = C_a + C_b$. Indicando con V_0 la differenza di potenziale ai capi dei condensatori all'istante $t = 0$, a tale istante valgono allora le equazioni

$$U_0 = \frac{1}{2}\,CV_0^2, \qquad V_0 = RI_0 \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2U_0}{C}}.$$

b) Se l'interruttore si trova nella posizione 1 il circuito equivale a un circuito RC, per cui la differenza di potenziale a capi dei condensatori ha l'andamento standard $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = RC$. Visto che l'energia elettrostatica dei condensatori all'istante t è $U(t) = CV^2(t)/2$, dobbiamo porre

$$\frac{1}{2} C\, V^2(t) = \frac{1}{2} C\, V_0^2 e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2} U_0 = \frac{1}{4} C\, V_0^2 \quad \Rightarrow \quad e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{2}\,\tau \ln 2 = \frac{1}{2}\, RC \ln 2.$$

c) $U_0/2 = CV_1^2/2$ e quindi $V_1 = \sqrt{U_0/C}$.
d) Se l'interruttore è nella posizione 2 il circuito è un circuito LC e la carica ha l'andamento generale

$$Q(t) = c_1\, cos(\omega t + c_2), \quad \omega \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{9}$$

La carica iniziale presente sui condensatori all'istante $t = t_1$ vale $Q(t_1) = CV_1 = \sqrt{CU_0}$. D'altra parte in un induttore la corrente varia con continuità, per cui $I(t_1) = \dot{Q}(t_1) = 0$. Con questi dati iniziali dalla (9) si ottiene

$$c_2 = -\omega t_1, \quad c_1 = \sqrt{CU_0} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \sqrt{CU_0}\, cos(\omega(t - t_1)).$$

e) A un generico istante t l'energia dei condensatori è data da

$$U(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{1}{2}\, U_0\, cos^2(\omega(t - t_1)) = \frac{U_0}{4} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1 + \frac{\pi}{4\omega} = \frac{1}{2}\, RC \ln 2 + \frac{\pi}{4}\sqrt{LC}.$$

f) Per la conservazione dell'energia si ha $U_0/2 = U_0/4 + U_L$, da cui $U_L = U_0/4$.
g) La corrente è massima quando i condensatori sono completamente scarichi. Per la conservazione dell'energia vale allora $U_0/2 = LI_M^2/2$, da cui $I_M = \sqrt{U_0/L}$.

Problema 4
a) Quando si chiude l'interruttore il fusibile è integro e la differenza di potenziale ai suoi capi è nulla. Di conseguenza è nulla anche la differenza di potenziale ai capi del resistore, che risulta cortocircuitato, e quindi $I_R(t) = 0$. Conseguentemente la corrente nell'induttore è determinata dall'equazione

$$\mathcal{E} = L\, \frac{dI_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad I_L(t) = \frac{\mathcal{E} t}{L}, \quad \text{per} \quad t \leq t_0.$$

b) $I_L(t)$ è anche la corrente che attraversa il fusibile. Quest'ultimo salta quindi all'istante t_0 per cui $I_L(t_0) = I_f$, ovvero all'istante $t_0 = I_f L/\mathcal{E} = 1.5s$.
c) Per $t > t_0$ nel fusibile non passa più corrente e abbiamo un circuito RL. A regime la corrente vale pertanto $I_\infty = \mathcal{E}/R = 0.67A$.
d) Per $t > t_0$ vale l'equazione

$$\mathcal{E} = L\, \frac{dI}{dt} + RI, \quad \text{con condizione iniziale} \quad I(t_0) = I_f, \tag{10}$$

dove $I(t)$ è ora la corrente che attraversa sia l'induttore, sia il resistore. La soluzione della (10) per $t > t_0$ è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_f\right) e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad \tau \equiv \frac{L}{R} = 0.33s.$$

Si noti che per $t \to \infty$ si ha $I(t) \to I_\infty$. Riassumendo: per $0 < t < t_0$ la corrente nell'induttore cresce linearmente fino al valore $I_f = 3A$; per $t > t_0$ la corrente decresce, invece, esponenzialmente fino al valore $I_\infty = 0.67A$, con un tempo caratteristico $\tau = 0.33s$.

Problema 5

a) $R = 2\rho bN/l^2$.

b) Per motivi di simmetria le linee di campo di $\vec{B}$ sono circonferenze concentriche con l'asse del solenoide. Applicando il teorema di Ampere si trova che all'esterno del solenoide il campo è nullo, mentre per una circonferenza di raggio r situata al suo interno si ottiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 N I,$$

dove I è la corrente che circola nel filo di rame. Ne segue che

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

Visto che $b \ll a$ all'interno del solenoide il campo può essere considerato costante, ovvero, $B_m \approx B(a) = \mu_0 N I/2\pi a$. Per il flusso concatenato con il solenoide si ottiene allora

$$\Phi = N B_m \pi b^2 = \frac{\mu_0 N^2 I b^2}{2a} = LI \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 N^2 b^2}{2a}.$$

c) L'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_0\, sen(\omega t) = L\frac{dI}{dt} + RI. \tag{11}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata è $I_{om}(t) = Ke^{-t/\tau}$, con $\tau = L/R$, che per $t \to \infty$ può essere trascurata. L'integrale particolare ha la forma

$$I(t) = I_0\, sen(\omega t - \varphi). \tag{12}$$

d) Sostituendo la (12) nella (11) si trova

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

e) La potenza istantanea fornita dal generatore è $w(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$, ovvero

$$w(t) = \mathcal{E}_0\, sen(\omega t) I_0 \left(sen(\omega t)\, cos\varphi - sen\varphi\, cos(\omega t) \right).$$

Mediando su un periodo risulta

$$w_m = \langle w(t) \rangle = \frac{1}{2}\, \mathcal{E}_0\, I_0\, cos\varphi.$$

Lo stesso risultato si trova valutando $w_m = R \left\langle I^2(t) \right\rangle = RI_0^2/2$, poiché nell'induttanza in media non si dissipa energia.

Problema 6

a) $R = 4a\rho/\Sigma$.

b) L'espressione del campo magetico prodotto da una spira sul suo asse è

$$\mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0 I_1 r^2}{2\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}.$$

Il campo cercato vale quindi

$$B_0 = \mathcal{B}(0) = \frac{\mu_0 I_1}{2r},$$

espressione che si ottiene anche applicando direttamente la prima legge elementare di Laplace. Questo campo può essere considerato uniforme nella regione occupata dal circuito, visto che la distanza di quest'ultimo dalla spira è grande rispetto alle dimensioni del circuito, $a \ll r$.
c) Il campo $\vec{B}(t)$ creato dalla spira ruotante nella regione del circuito ha modulo B_0 e la sua direzione $\vec{n}(t) = cos(\omega t)\,\vec{u}_x + sen(\omega t)\,\vec{u}_y$ ruota attorno all'asse z con velocità angolare ω:

$$\vec{B}(t) = B_0\,\vec{n}(t).$$

La superficie orientata del circuito può essere scritta come $\vec{\Sigma} = a^2\vec{u}_x$, sicché il flusso vale

$$\Phi(t) = \vec{B}(t)\cdot\vec{\Sigma} = B_0 a^2 cos(\omega t) \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega B_0 a^2 sen(\omega t) \Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega B_0 a^2}{R} sen(\omega t).$$

La corrente massima è quindi

$$I_0 = \frac{\omega B_0 a^2}{R} = \frac{\omega \mu_0 I_1 a^2}{2Rr} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2rRI_0}{\mu_0 a^2 I_1}.$$

d) Il campo magnetico esercita sul circuito un momento dato da $\vec{M}_B(t) = \vec{\mu}(t)\times\vec{B}(t)$, dove il momento magnetico del circuito è $\vec{\mu}(t) = I(t)\,\vec{\Sigma} = I(t)\,a^2\vec{u}_x$. Visto che il circuito è fermo il supporto deve esercitare un momento meccanico uguale ed opposto

$$\vec{M}(t) = -\vec{M}_B(t) = -a^2 B_0 I_0 sen^2(\omega t)\,\vec{u}_z.$$

Il momento meccanico massimo è quindi $M = a^2 B_0 I_0 = \mu_0 a^2 I_0 I_1/2r$.
e) La potenza totale esterna applicata si dissipa per effetto Joule nei due circuiti. La potenza istantanea è $w(t) = R_1 I_1^2 + RI(t)^2 = R_1 I_1^2 + RI_0^2 sen^2(\omega t)$. Mediando su un periodo si ottiene dunque $\langle w\rangle = R_1 I_1^2 + RI_0^2/2$.

Problema 7
a) Immediatamente dopo l'istante iniziale la corrente scorre in senso orario di modo tale da creare un campo magnetico entrante nel foglio, che contrasta l'aumento del flusso magnetico nel circuito (legge di Lenz). Tale verso si mantiene se l'asta non risale mai. Come si vedrà al punto b), nel caso dell'induttanza l'asta in realtà oscilla. Tuttavia, dalla soluzione esplicita si vedrà che la corrente mantiene comunque sempre lo stesso verso orario.
b) Se con x si indica l'asse verticale discendente e si orienta il circuito in senso orario, il flusso di $\vec{B}$ attraverso il circuito è $\Phi = -ax(t)B$. Si ottiene la f.e.m. indotta

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = aBv(t). \tag{13}$$

Questa induce una corrente $I(t)$, che per convenzione consideriamo positiva se circola in senso orario. Per la seconda legge elementare di Laplace sull'asta agisce allora la forza verticale $F = -aBI(t)$, rivolta verso l'alto se $I(t) > 0$. L'equazione del moto dell'asta è allora

$$m\frac{dv}{dt} = mg - aBI \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{aB}{m}\,I. \tag{14}$$

I tre casi considerati si differenziano nella relazione tra I e v.
Resistore: $IR = \varepsilon = aBv$. Con le condizioni iniziali $v(0) = x(0) = 0$ la soluzione della (14) è

$$v(t) = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad x(t) = g\tau\left(t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right), \quad I(t) = \frac{mg}{aB}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau \equiv \frac{mR}{a^2B^2}.$$

Asintoticamente il moto è uniforme, e per $t \to \infty$ la corrente tende al valore costante $I_\infty = mg/aB$.

Condensatore: $\dfrac{Q}{C} = \varepsilon = aBv \Rightarrow I = \dfrac{dQ}{dt} = CaB\dfrac{dv}{dt}$. Con $v(0) = x(0) = 0$ la (14) dà ora

$$v(t) = At, \quad x(t) = \frac{1}{2}At^2, \quad I(t) = CaBA, \quad Q(t) = CaBAt, \quad A \equiv \frac{g}{1 + \frac{Ca^2B^2}{m}}.$$

Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $A < g$, mentre la corrente è costante nel tempo.

Induttore: $L\dfrac{dI}{dt} = \varepsilon = aBv$. In questo caso la (14) diventa

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega^2 I = \frac{gaB}{L}, \quad \omega \equiv \frac{aB}{\sqrt{mL}}, \quad \text{con condizioni iniziali} \quad I(0) = \frac{dI}{dt}(0) = 0.$$

La soluzione è

$$I(t) = \frac{mg}{aB}\left(1 - cos(\omega t)\right), \quad v(t) = \frac{g}{\omega}\, sen(\omega t), \quad x(t) = \frac{g}{\omega^2}\left(1 - cos(\omega t)\right).$$

Il moto è armonico e la corrente oscilla tra il valore minimo $I = 0$ e il valore massimo $I = 2mg/aB$. La corrente circola dunque sempre in senso orario.

c) Il campo magnetico complessivamente non compie lavoro. Inoltre gli elementi resistivi sono dissipativi, mentre quelli capacitivi e induttivi sono conservativi. Nel caso del resistore la diminuzione dell'energia meccanica dell'asta nell'unità di tempo uguaglia la potenza dissipata per effetto Joule,

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -I^2R,$$

equazione che si verifica facilmente essere equivalente alla (14). Nel caso del condensatore si conserva l'energia totale

$$U = \mathcal{E}_m + \frac{Q^2}{2C},$$

mentre nel caso dell'induttore si conserva l'energia totale

$$U = \mathcal{E}_m + \frac{1}{2}LI^2.$$

Scrivendo in questi ultimi due casi l'equazione $dU/dt = 0$ si ritrova di nuovo la (14).

Problema 8

a) Il campo magnetico generato dal filo nel piano xy è parallelo all'asse z e la sua intensità dipende solo da x: $\vec{B} = (0, 0, B(x))$, con $B(x) = -\mu_0 I_1/2\pi x$. Per x positivi $\vec{B}$ è quindi diretto nel verso delle z decrescenti, ovvero è entrante nel foglio. Scegliendo come verso delle spire quello antiorario, e orientando corrispondentemente la loro superficie nel verso delle z crescenti, il flusso di $\vec{B}$ attraverso la bobina si scrive

$$\Phi = N\int_b^{b+a} B(x)\, a\, dx = -\int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\, a\, dx = -\frac{NI_1\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}.$$

Da $|\Phi| = MI_1$ si trova allora

$$M = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{b+a}{b}. \tag{15}$$

b) Per $t > 0$ si ha

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(MI_1) = \frac{d}{dt}(M\alpha t) = \alpha M,$$

che induce nella bobina una corrente $I(t)$ che circola in senso antiorario.
c) Avendo scelto come verso di $I(t)$ quello antiorario, la bobina è soggetta alla forza elettromotrice $\mathcal{E} = \alpha M$, che genera una corrente in senso antiorario, nonché alla forza elettromotrice di autoinduzione LdI/dt. Avendo la bobina resistenza R l'equazione del circuito è quindi

$$\alpha M = L\frac{dI}{dt} + RI \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{\alpha M}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau \equiv \frac{L}{R},$$

dove si è tenuto conto della condizione iniziale $I(0) = 0$.
d) Per $t \to \infty$ la corrente tende al valore $I_\infty = \alpha M/R$, sicché si ottiene,

$$U = \frac{1}{2}\,L\,I_\infty^2 = \frac{L\alpha^2 M^2}{2R^2}.$$

e) Il campo magnetico generato dal filo non è spazialmente uniforme ed esercita quindi una forza non nulla $\vec{F}_B$ sulle spire della bobina, attraverso la seconda legge elementare di Laplace $d\vec{F} = Id\vec{s} \times \vec{B}$. Il supporto deve dunque esercitare una forza $\vec{F}$ uguale ed opposta. Le forze esercitate dal campo magnetico sui lati della bobina paralleli all'asse x sono uguali ed opposte, mentre sui lati paralleli all'asse y risulta una forza complessiva non nulla diretta lungo l'asse delle x crescenti, data a un generico istante t da

$$\begin{aligned} F_B(t) &= -NI(t)a|B(b)| + NI(t)a|B(a+b)| = NI(t)a\left(\frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi b} - \frac{\mu_0 I_1(t)}{2\pi(b+a)}\right) \\ &= \frac{Na^2\alpha^2\mu_0 M}{2\pi Rb(b+a)}\,t\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \end{aligned}$$

All'istante t_1 il supporto deve quindi esercitare la forza $\vec{F} = (-F_B(t_1), 0, 0)$, rivolta nel verso delle x decrescenti.
f) Indicando con 1 il filo e con 2 la bobina, visto che $d\vec{r}_1$ è parallelo all'asse y, nell'integrale (2) i tratti della bobina paralleli all'asse x non contribuiscono. Per quanto riguarda i tratti della bobina paralleli all'asse y i due circuiti si possono parametrizzare con $\vec{r}_1 = (0, y_1, 0)$ e $\vec{r}_2 = (0, y_2, 0)$, sicché $d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = \pm dy_1 dy_2$. Si ottiene così,

$$M = \frac{\mu_0 N}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^a dy_2\,\frac{1}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + b^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_0^a dy_2\,\frac{1}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (b+a)^2}}\right].$$

Nel valutare questi integrali occorre tenere presente che l'integrale (2) è ben definito, purché si esegua prima l'integrazione sulla spira e successivamente quella sul filo.

Problema 9

a) Per motivi di simmetria le linee di campo del campo elettrico indotto sono circonferenze concentriche con l'asse z percorse in senso orario, visto che $\alpha > 0$ (legge di Lenz). Il campo elettrico ha dunque la forma generale

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_\varphi, \quad \text{dove il versore } \vec{u}_\varphi \text{ ha componenti} \quad \vec{u}_\varphi = \left(\frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, 0\right), \quad \text{e} \quad E(r) > 0.$$

Si applica la regola del flusso $\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\dot{\Phi}_\gamma(\vec{B})$, con γ circonferenza di raggio r concentrica con l'asse z orientata in senso orario. Visto che allora $\vec{u}_\varphi \cdot \vec{ds} = r\, d\varphi$ si ottiene

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} = 2\pi r E(r).$$

Il flusso $\Phi_\gamma(\vec{B})$ si valuta ricordando che per un solendoide ideale si ha

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \begin{cases} (0,0,\mu_0 n I(t)) = (0,0,\mu_0 n\alpha t), & \text{per } r<R,\\ (0,0,0), & \text{per } r>R. \end{cases} \tag{16}$$

Ricordando l'orientazione scelta per γ, per $r<R$ si ottiene allora $\Phi_\gamma(\vec{B}) = -\pi r^2(\mu_0 n\alpha\, t)$, mentre per $r>R$ si ottiene $\Phi_\gamma(\vec{B}) = -\pi R^2(\mu_0 n\alpha\, t)$. Seguono allora facilmente le (3).
b) Le prime tre equazioni delle (4) si verificano facilmente valutando le derivate dei campi dati in (3) e (16), e notando che $\rho=0$. Nell'equazione di Ampere–Maxwell la corrente di spostamento si annulla, poiché $\vec{E}$ non dipende dal tempo. Considerandola in forma integrale occorre allora dimostrare che

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{ds} = \mu_0 I_\gamma, \tag{17}$$

per una qualsiasi curva chiusa γ. Visto che $\vec{B}$ è uniforme questa equazione è banalmente soddisfatta per una qualsiasi curva chiusa che non interseca il solenoide, sia essa contenuta nel suo interno o nel suo esterno, in quanto allora entrambi i membri della (17) sono zero. È allora sufficiente dimostrare la (17) per una curva γ che interseca il solenoide in due punti $P=(x_1,y_1,z_1)$ e $Q=(x_2,y_2,z_2)$, appartenendo "per metà" al suo esterno e per metà al suo interno. Orientando γ di modo tale che il tratto $P\to Q$ stia all'interno del solenoide e il tratto $Q\to P$ al suo esterno, e tenendo conto che all'interno $\vec{B}$ è uniforme, si ha allora

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_P^Q \vec{B}\cdot\vec{ds} = \overrightarrow{PQ}\cdot(0,0,\mu_0 n\alpha t) = \mu_0 n\alpha t\,(z_2-z_1).$$

D'altra parte la corrente concatenata con γ è data da $I_\gamma = n(z_2-z_1)I(t) = n(z_2-z_1)\alpha t$. Segue quindi la (17).
c) Una possibile scelta di potenziali è $\varphi(t,\vec{x})=0$ e

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 n\alpha t}{2}\,(-y,x,0), & \text{per } r<R,\\ \dfrac{\mu_0 n\alpha t R^2}{2r^2}\,(-y,x,0), & \text{per } r>R. \end{cases}$$

Vale infatti $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.
d) Per il teorema dell'energia cinetica si ha $\Delta T = \oint q\,\vec{E}\cdot\vec{ds} = 2\pi r q E(r)$. Per $r>R$ dalle (3) si ottiene $E(r) = \mu_0 n\alpha R^2/2r$, sicché $\Delta T = \mu_0 n\alpha q\pi R^2$.

Problema 10
a) Si verifica che con la scelta

$$\varphi=0, \quad A_x=0, \quad A_y=0, \quad A_z = \frac{\mu_0 I_0 H(ct-r)}{2\pi}\ln\left(\frac{ct}{r}+\sqrt{\frac{c^2t^2}{r^2}-1}\right),$$

vale $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$.
b) Vista l'esistenza dei potenziali le due equazioni di Maxwell omogenee sono automaticamente soddisfatte. Dato che E_z non dipende da z si ha inoltre $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \partial_z E_z = 0$, sicché l'equazione $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ porge $\rho = 0$. Infine, eseguendo nell'equazione di Ampere–Maxwell le derivate in modo "naiv", si troverebbe $\vec{j} = 0$. Tuttavia, tali derivate "falliscono" in $r = 0$, dove $\vec{B}$ è singolare, e andrebbero eseguite nel senso delle distribuzioni. Per aggirare il problema conviene considerare questa equazione in forma integrale

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{s} - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 I_S, \tag{18}$$

dove $\gamma = \partial S$. Per via della presenza della funzione di Heaviside, per $t < 0$ i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono nulli, sicché per $t < 0$ abbiamo comunque $\vec{j}(t,\vec{x}) = 0$.

Consideriamo viceversa un istante $t > 0$. Visto che le linee di campo di $\vec{B}$ sono circonferenze concentriche con l'asse z, la corrente deve fluire lungo l'asse z. Valutiamo allora la (18) prendendo per S un disco di raggio r ortogonale all'asse z e concentrico con esso. Otteniamo

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{s} = 2\pi r|\vec{B}| = 2\pi f(t,r) = \frac{\mu_0 I_0 H(ct-r)}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{c^2t^2}}}. \tag{19}$$

D'altra parte

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{1}{t}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r'dr' f(t,r') = -\frac{\mu_0 I_0}{t}\int_0^r r'dr'\,\frac{H(ct-r')}{\sqrt{1-\dfrac{r'^2}{c^2t^2}}}.$$

L'integrale ha due determinazioni diverse a seconda che sia $ct > r$ o $ct < r$. Considerando entrambi i casi otteniamo

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{E}) &= -\frac{\mu_0 I_0}{t}\left(H(ct-r)\int_0^r \frac{r'dr'}{\sqrt{1-\dfrac{r'^2}{c^2t^2}}} + H(r-ct)\int_0^{ct} \frac{r'dr'}{\sqrt{1-\dfrac{r'^2}{c^2t^2}}}\right)\\
&= \mu_0 I_0 c\left(H(ct-r)\sqrt{c^2t^2-r^2} - ct\right),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $H(ct-r) + H(r-ct) = 1$. Di conseguenza

$$\frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 I_0 c^2\left(\frac{H(ct-r)}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{c^2t^2}}} - 1\right).$$

Considerando che $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ la (18) diventa allora

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{s} - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} = \mu_0 I_0 = \mu_0 I_S.$$

Visto che il risultato è valido per qualsiasi $r > 0$ concludiamo che per $t > 0$ lungo l'asse z scorre una corrente di intensità costante I_0. In definitiva, lungo l'asse z scorre una corrente nulla per $t < 0$ e costante per $t > 0$:

$$I(t) = I_0\, H(t). \tag{20}$$

c) A livello qualitativo il campo $\vec{B}$ in (6) viene generato "principalmente" dalla corrente, mentre il campo elettrico (5) viene indotto "principalmente" dal campo magnetico variabile nel tempo. Si noti, tuttavia, il ruolo cruciale giocato dalla "corrente di spostamento" per la consistenza della soluzione completa. Dalle (5), (6) si vede che per $t < 0$ i campi sono nulli in tutto lo spazio, mentre ad ogni istante $t > 0$ fissato i campi sono diversi da zero solo nei punti che distano dall'asse z meno di ct. Ciò è dovuto al fatto che la corrente viene accesa solo all'istante $t = 0$, e che il campo elettromagnetico si propaga con la velocità della luce a partire dall'asse z. Prima che raggiunga quindi un punto a distanza r deve passare il tempo $t = r/c$. Si noti inoltre che a ogni distanza r fissata per tempi grandi si hanno i limiti

$$\lim_{t\to\infty} \vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r^2}\,(-y, x, 0), \qquad \lim_{t\to\infty} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0.$$

Per tempi molto grandi il campo magnetico tende quindi a quello generato da un filo percorso da una corrente I_0 indipendente dal tempo, mentre il campo elettrico va a zero, perdendo dunque memoria del fatto che il campo magnetico è variabile nel tempo.

Facciamo notare che i campi (5), (6) divergono per $r = ct$. Si potrebbe vedere che questa singolarità è "non fisica", nel senso che è causata dalla schematizzazione semplicistica della corrente (20), che è *discontinua* in $t = 0$. Se si scegliesse una corrente $I(t)$ che sale con continuità da zero al valore I_0 i campi sarebbero ovunque regolari, tranne in $r = 0$. Tuttavia, in questo caso $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in generale non possono più essere determinati analiticamente.