Problemi di Elettrostatica

Problema 1

La carica $Q > 0$ è distribuita in modo uniforme lungo una sottile bacchetta di lunghezza $2L$ disposta lungo l'asse x. Il centro della bacchetta si trova nel punto di coordinate $(0,0,0)$.

a) Si dimostri che il campo elettrico nel punto $P = (0,y,0)$ vale

$$\vec{E} = (0, E_y(y), 0), \quad \text{con} \quad E_y(y) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, y\sqrt{L^2+y^2}}.$$

b) Si determini la densità di energia elettrostatica w_E nel punto P.

c) Si verifichi che per $|y| \to \infty$ $\vec{E}$ assume la corretta forma asintotica

$$\vec{E}_\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{r^3}.$$

d) Eseguendo un opportuno limite di $\vec{E}$ si derivi il campo elettrico prodotto da una distribuzione lineare infinita di carica.

Problema 2

Si consideri un modello dell'atomo in cui Z protoni di carica $+e$ sono distribuiti in modo uniforme all'interno di una sfera di raggio r_N, formante il nucleo. Si supponga che Z elettroni di carica $-e$ formino una nuvola sferica uniforme di raggio r_A, corrispondente al raggio dell'atomo. Si assumano gli ordini di grandezza realistici $r_N \approx 1fm = 10^{-15}m$ e $r_A \approx 10^{-10}m$, sicché $r_N \ll r_A$.

a) Si determini il potenziale $\varphi(r)$ in funzione del raggio r all'interno e all'esterno dell'atomo, imponendo la condizione $\varphi(\infty) = 0$.

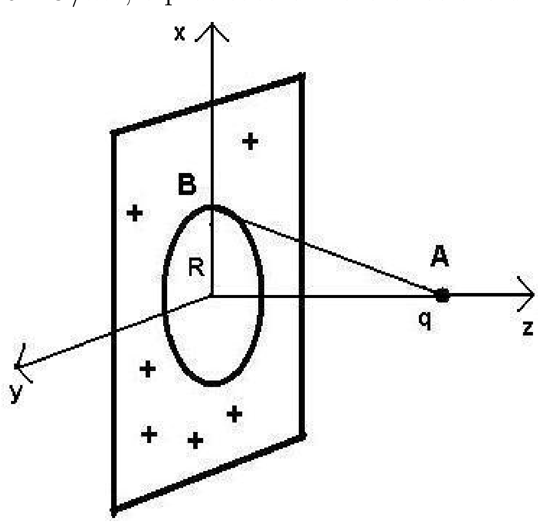
b) Si tracci il grafico del campo elettrico in funzione di r.

c) Quanto vale numericamente il campo elettrico sulla superficie del nucleo? Si esprima il risultato in V/m.

d) Si supponga che una particella α di carica $+2e$ urti l'atomo in modo radiale. Qual è la minima energia cinetica che la particella α deve possedere per poter raggiungere il nucleo? Si esprima il risultato in eV.

Problema 3

In un foglio isolante infinito posto nel piano verticale xy carico con densità superficiale $\sigma = 10^{-6}C/m^2$, è praticato un foro circolare di raggio $R = 10cm$ con centro in $(0,0,0)$, vedi figura.



a) Si determinino il potenziale $\varphi(z)$ e il campo elettrico $\vec{E}(z)$ sull'asse z.
b) Si osserva che una particella di carica $q > 0$ e massa $m = 10^{-3}kg$ si trova sospesa in equilibrio nella posizione $A = (0, 0, 2R)$, essendo legata attraverso un filo inestensibile di massa trascurabile al punto $B = (R, 0, 0)$. Si determini q.
c) Considerando una particella di massa m e carica $-q < 0$ vincolata a muoversi lungo l'asse z si dimostri che essa compie un moto periodico e se ne determini il periodo T delle piccole oscillazioni.

Problema 4
Due particelle di carica $Q > 0$ sono vincolate nei punti $(a/2, a/2, 0)$ e $(-a/2, a/2, 0)$ e due particelle di carica $-Q$ sono vincolate nei punti $(-a/2, -a/2, 0)$ e $(a/2, -a/2, 0)$, con $a > 0$. Siano note a e l'energia elettrostatica U_E del sistema.
a) Si determini Q.
b) Si determini il lavoro L_{ext} che occorre compiere contro il campo elettrico per portare una delle quattro cariche all'infinito mentre le rimanenti tre restano fisse. Tale lavoro è positivo o negativo?
c) Per portare una carica di prova q dal punto $A = (0, -a/2, 0)$ al punto $B = (0, 0, 0)$ si compie un lavoro noto $L < 0$ contro le forze elettriche. Si determinino segno e modulo di q.
d) A un certo istante si libera la particella che si trova nel punto $(a/2, a/2, 0)$. Trascurando la forza peso si determini la direzione della sua velocità immediatamente dopo tale istante.

Problema 5
I centri di due distribuzioni sferiche statiche di ugual carica totale $Q > 0$ e raggi r_1 e r_2 si trovano rispettivamente nei punti $A = (-b, 0, 0)$ e $B = (b, 0, 0)$, dove $b > 0$, $r_1 < b$ e $r_2 < b$. Una particella di prova di carica q e massa m è vincolata a muoversi senza attrito sull'asse delle y. Si trascuri la forza peso.
a) Si esegua un'analisi qualitativa del moto della particella di prova distinguendo i casi $q > 0$ e $q < 0$.
b) Siano $y(t)$ e $v(t)$ rispettivamente la legge oraria e la velocità della particella di prova. Considerando il caso $q < 0$ e supponendo che $v(0) = 0$ e che $y(0) = \sqrt{3}b$ si dia una rappresentazione integrale del periodo T del moto. Si determini il periodo T_0 delle piccole oscillazioni.
c) Considerando il caso $q > 0$ e supponendo che $y(0) = \sqrt{3}b$ si determinino i valori di $v(0)$ per cui la particella a un certo istante passa per il punto $P = (0, 0, 0)$.

Problema 6
Problema a due corpi in campo esterno: due particelle cariche di masse m_1 e m_2 e cariche $q_1 = q > 0$ e $q_2 = -q < 0$ si trovano in presenza di una distribuzione piana uniforme infinitamente estesa di carica posta nel piano yz, con densità superficiale $\sigma > 0$. Si supponga che le due cariche si trovino sempre nella regione delle x positive e si trascuri la forza peso. Si indichino le leggi orarie delle particelle con $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$.
a) Si dimostri che il centro di massa delle particelle si muove di moto rettilineo uniforme.
b) Si derivi l'equazione del moto per la coordinata relativa $\vec{r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.
c) Si determini la forma dell'energia meccanica totale conservata $\mathcal{E}_M$ del sistema.
d) Si determini la forma dell'energia meccanica del moto relativo conservata $\mathcal{E}_r$.
e) Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema specificando se sono stabili o instabili.
f) Si supponga d'ora in poi che le particelle siano vincolate a muoversi sul semiasse delle x positive: $\vec{r}_1(t) = (x_1(t), 0, 0)$, $\vec{r}_2(t) = (x_2(t), 0, 0)$. Supponendo che le velocità iniziali delle particelle siano $v_1(0) = 0 = v_2(0)$ si esegua un'analisi qualitativa dei moti delle due particelle al

variare del parametro $\Delta = x_2(0) - x_1(0)$.
g) Supponendo che $v_1(0) = 0 = v_2(0)$ e che $\Delta > 0$ si determinino le velocità v_1^* e v_2^* delle particelle all'istante t^* tale che $x_2(t^*) - x_1(t^*) = \Delta/2$.

Problema 7

Tre particelle cariche di prova identiche di massa m e carica $q > 0$ si muovono in presenza di una particella di carica Q vincolata in un punto P. Si trascuri la forza peso.
a) Si determini il valore Q_0 della carica Q per cui esistono configurazioni di equilibrio per le tre particelle di prova.
b) Si assuma che sia $Q = Q_0/2$. Si supponga che le tre cariche siano a riposo formando un triangolo equilatero di lato a e centro P e che all'istante $t = 0$ vengano liberate. Si determini lo spazio L che ha percorso una carica tra l'istante $t = 0$ e l'istante in cui ha acquistato la velocità v.
c) Si supponga ora che sia $Q = 2Q_0$. Si determini la velocità angolare ω con cui le cariche devono ruotare attorno a P per poter formare a ogni istante un triangolo equilatero di lato a fissato.

Soluzioni

Problema 1

a) La densità lineare di carica vale $\lambda = Q/2L$. Per motivi di simmetria nel punto $P = (0, y, 0)$ il campo elettrico è diretto lungo l'asse y: $\vec{E} = (0, E_y, 0)$. È dunque sufficiente determinarne la componente y. Un tratto infinitesimo della bacchetta di lunghezza dx situato nel punto $(x, 0, 0)$ crea in P un campo elettrico dato in modulo da

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)} = \frac{Q dx}{8\pi\varepsilon_0 L(x^2 + y^2)}.$$

La componente y di dE si ottiene proiettando dE sull'asse y:

$$dE_y = cos\varphi\, dE = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dE = \frac{Q y dx}{8\pi\varepsilon_0 L(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Di conseguenza

$$E_y(y) = \int_{-L}^{L} dE_y = \frac{Qy}{8\pi\varepsilon_0 L}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2 + y^2}}. \tag{1}$$

b) La densità di energia elettrostatica in un punto P generico vale $w_E(P) = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(P)|^2$. Nel caso in questione si ha quindi

$$w_E(P) = \frac{\varepsilon_0}{2}\, E_y^2(y) = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 y^2(L^2 + y^2)}.$$

c) Per $|y| \to \infty$ si ha l'identificazione asintotica

$$\frac{1}{\sqrt{L^2 + y^2}} \to \frac{1}{|y|},$$

sicché sull'asse y il campo assume la forma

$$\vec{E} \to \vec{E}_\infty = \left(0, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y|y|}, 0\right) = \left(0, \frac{Qy}{4\pi\varepsilon_0|y|^3}, 0\right) = \frac{Q\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

d) Riscrivendo il campo dato in (1) in termini di λ risulta

$$E_y(y) = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2 + y^2}}, \quad \text{sicché} \quad \lim_{L\to\infty} E_y(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y},$$

che è la nota espressione del campo elettrico prodotto da una distribuzione lineare λ di carica.

Problema 3

a) Il potenziale $\varphi(z)$ può essere calcolato usando il *metodo della compensazione*. Indicando con $\varphi_D(z)$ il potenziale generato sull'asse z da un disco (virtuale) di raggio R e con $\varphi_P(z)$ quello generato da un piano infinito si ha $\varphi(z) = \varphi_P(z) - \varphi_D(z)$, dove $\varphi_P(z) = -\sigma|z|/2\varepsilon_0$. Per calcolare $\varphi_D(z)$ conviene integrare il potenziale infinitesimo $d\varphi$ generato sull'asse z da una corona circolare di raggio ρ e spessore $d\rho$

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(2\pi\rho d\rho)\sigma}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + \rho^2}} \Rightarrow \varphi_D(z) = \int_0^R d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z|\right).$$

Di conseguenza
$$\varphi(z) = \varphi_P(z) - \varphi_D(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{z^2+R^2}.$$
Per motivi di simmetria il campo elettrico sull'asse z ha solo componente z, $\vec{E} = (0, 0, E_z(z))$, dove
$$E_z(z) = -\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$
b) All'equilibrio la forza esercitata dalla fune, ovvero la sua tensione $\vec{F}$, deve essere bilanciata dalla somma della forza peso e della forza elettrica:
$$\vec{F} + m\vec{g} + q\vec{E} = 0.$$
Proiettando questa equazione lungo le direzioni x e z si ottengono le relazioni,
$$F sen\alpha - mg = 0, \qquad -F cos\alpha + qE_z(2R) = 0,$$
dove α indica l'angolo tra il filo e l'asse z. Visto che $\tan\alpha = R/2R = 1/2$ e che $E_z(2R) = \sigma/2\sqrt{5}\varepsilon_0$ ne segue che
$$\frac{mg}{qE_z(2R)} = \tan\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2mg}{E_z(2R)} = \frac{4\sqrt{5}\varepsilon_0 mg}{\sigma}.$$
c) L'energia potenziale è data da
$$U(z) = -q\varphi(z) = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{z^2+R^2}$$
e possiede un minimo (assoluto) in $z = 0$. La particella compie dunque un moto periodico attorno a $z = 0$. Per determinare il periodo delle piccole oscillazioni occorre scrivere l'equazione di Newton
$$m\ddot{z} = -\frac{\partial U(z)}{\partial z} = -qE_z(z)$$
ed espandere il membro di destra in serie di Taylor attorno a $z = 0$ arrestando l'espansione al primo ordine in z. Visto che
$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 R} + O(z^2)$$
l'equazione linearizzata diventa
$$m\ddot{z} = -\frac{q\sigma z}{2\varepsilon_0 R} \quad \leftrightarrow \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad \text{dove} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 Rm}}.$$
Il periodo è quindi $T = 2\pi/\omega$.

Problema 4

a) L'energia elettrostatica del sistema è data da
$$U_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Q^2}{a} - \frac{2Q^2}{a} - \frac{2Q^2}{\sqrt{2}a}\right) = -\frac{Q^2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a} < 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{-2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a U_E}.$$
Visto che $L_E = -U_E > 0$ il campo compie un lavoro positivo per costruire la configurazione di carica.

b) Il potenziale creato dalle altre tre cariche nel punto $P = (a/2, a/2, 0)$ vale
$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a} - \frac{Q}{a} - \frac{Q}{\sqrt{2}a}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}.$$

L'energia potenziale della particella in P vale quindi $U(P) = Q\varphi(P)$. Il lavoro L_∞ compiuto dal campo elettrico per portare la carica all'infinito, dove il potenziale e l'energia potenziale sono nulli, vale quindi $L_\infty = -\Delta U = -Q\,(0 - \varphi(P)) = Q\varphi(P)$. Di conseguenza

$$L_{ext} = -L_\infty = -Q\varphi(P) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} > 0.$$

c) I potenziali creati da tutte e quattro le cariche nei punti A e B sono dati rispettivamente da

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\left(-\frac{Q}{a/2}\right) + 2\left(\frac{Q}{\sqrt{5}a/2}\right)\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right), \qquad \varphi(B) = 0.$$

Per spostare la carica q dal punto A al punto B il campo elettrico compie il lavoro $L_E = -\Delta U = -q\Delta\varphi = -q(\varphi(B) - \varphi(A)) = q\varphi(A)$. Il lavoro fatto dalle forze esterne vale quindi

$$L = -L_E = -q\varphi(A) = \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{L\pi\varepsilon_0 a}{Q\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} < 0.$$

d) Dato che la velocità iniziale della particella è nulla, la direzione della sua velocità immediatamente dopo essere stata liberata coincide con la direzione della sua accelerazione iniziale $\vec{a}$. Per l'equazione di Newton $m\vec{a} = Q\vec{E}$ la direzione di $\vec{a}$ coincide a sua volta con la direzione del campo elettrico totale $\vec{E}$ creato dalle altre tre particelle nel punto $(a/2, a/2, 0)$. Questo campo si ottiene sommando vettorialmente i campi coulombiani delle tre particelle – un esercizio standard.

Problema 5

a) In un punto esterno alle due sfere il potenziale e il campo elettrico equivalgono a quelli creati da due particelle puntiformi di carica Q poste nei punti A e B. Il potenziale creato dalle due sfere sull'asse y è quindi dato da

$$\varphi(y) = 2 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + b^2}},$$

sicché l'energia potenziale della particella di prova ha l'espressione

$$U(y) = q\varphi(y) = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{y^2 + b^2}}.$$

Questa funzione ha come punto estremale $y = 0$ in cui vale $U(0) = qQ/2\pi\varepsilon_0 b$. Indicando con

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + U(y)$$

l'energia meccanica totale conservata della particella, dallo studio della funzione $U(y)$ si vede che nel caso $q > 0$ la particella compie moti illimitati percorrendo l'intero asse y se $\mathcal{E}_M > U(0)$, mentre se $0 < \mathcal{E}_M < U(0)$ compie moti illimitati lungo una semiretta dell'asse y invertendo il moto nel punto y_i tale che $\mathcal{E}_M = U(y_i)$. Nel caso $q < 0$ la particella compie moti illimitati percorrendo l'intero asse y se $\mathcal{E}_M > 0$, mentre se $U(0) < \mathcal{E}_M < 0$ compie moti limitati periodici nell'intervallo $[-y_p, y_p]$, dove y_p è determinato dalla condizione $\mathcal{E}_M = U(y_p)$.

b) Visto che $v(0) = 0$ e $y(0) = \sqrt{3}b$ l'energia totale vale

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2(0) + U\left(\sqrt{3}b\right) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

ed è negativa. Dato che $q<0$ il moto è dunque periodico e si svolge nell'intervallo $[-\sqrt{3}b, \sqrt{3}b]$. Il periodo T si può calcolare risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + U(y) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b}, \quad v \equiv \frac{dy}{dt}$$

con il metodo della separazione delle variabili. Si ottiene

$$T = 4\int_0^{\sqrt{3}b} \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b} - U(y)\right)}}.$$

Un modo conveniente per determinare il periodo delle piccole oscillazioni consiste nel linearizzare l'equazione di Newton attorno alla posizione di equilibrio $y=0$:

$$m\ddot{y} = qE_y = -q\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} = -\frac{\partial U(y)}{\partial y} = \frac{qQy}{2\pi\varepsilon_0(y^2+b^2)^{3/2}} \to \frac{qQy}{2\pi\varepsilon_0 b^3}.$$

Ponendo l'equazione ottenuta nella forma $\ddot{y}+\omega^2 y = 0$ si trova $\omega^2 = -qQ/2\pi\varepsilon_0 b^3 m$, da cui $T_0 = 2\pi/\omega$.

c) Dato che $q>0$ la particella può passare per il punto $P=(0,0,0)$ se $\mathcal{E}_M > U(0) = qQ/2\pi\varepsilon_0 b$ e se $v(0)<0$. Nel caso in questione si ha

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}\,mv^2(0) + U\left(\sqrt{3}b\right) = \frac{1}{2}\,mv^2(0) + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 b} > \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 b} \quad \Rightarrow \quad v(0) < -\sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 bm}}.$$

Problema 6

a) Nella regione $x>0$ il campo elettrico generato dalla distribuzione piana vale $\vec{E} = (\sigma/2\varepsilon_0, 0, 0)$, a cui corrisponde il potenziale $\varphi(\vec{x}) = -\sigma x/2\varepsilon_0$ (si ricordi che $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$). Tenendo conto dell'interazione reciproca e del campo esterno le equazioni del moto delle particelle si scrivono ($a_i \equiv \ddot{\vec{r}}_i, \vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$)

$$m_1\vec{a}_1 = \frac{q^2\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + q\vec{E}, \tag{2}$$

$$m_2\vec{a}_2 = -\frac{q^2\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - q\vec{E}. \tag{3}$$

Sommando queste relazioni si ottiene per l'accelerazione del centro di massa

$$\vec{a}_{CM} = \ddot{\vec{r}}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2} = 0,$$

sicché quest'ultimo si muove di moto rettilineo uniforme.

b) L'equazione del moto relativo si ottiene come al solito dividendo la (2) per m_1 e la (3) per m_2 e sottraendo le equazioni ottenute ($\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}}$, $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1+m_2)$):

$$\mu\vec{a} = -\frac{q^2\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - q\vec{E}. \tag{4}$$

c) Tenendo conto sia dell'energia potenziale di interazione che di quella dovuta al campo esterno l'energia meccanica del sistema risulta

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + q\varphi(\vec{r}_1) - q\varphi(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}\,m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2v_2^2 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\,(x_1-x_2).$$

d) L'energia meccanica del moto relativo si può dedurre dall'equazione del moto relativo (4) oppure dalla forma di $\mathcal{E}_M$, considerando l'identità

$$\frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\,\mu v^2, \quad \vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Si ottiene

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2}\,\mu v^2 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\,(x_1 - x_2). \tag{5}$$

e) Le cariche possono essere in equilibrio solo se le forze nel secondo membro delle equazioni (2) e (3) sono nulle. Si conclude pertanto che le cariche si devono trovare su una retta parallela all'asse x e a una distanza $x_1 - x_2 > 0$ tale

$$\frac{q^2(x_2 - x_1)}{4\pi\varepsilon_0 |x_2 - x_1|^3} + \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = \sqrt{\frac{q}{2\pi\sigma}} \equiv L. \tag{6}$$

Tale equilibrio è evidentemente instabile, si veda il quesito f).

f) Visti i dati iniziali $v_1(0) = 0 = v_2(0)$ e dato che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme avremo $v_{CM}(t) = v_{CM}(0) = 0$, sicché le velocità delle particelle sono determinate a ogni istante dalla velocità relativa $v_2 - v_1 = v$:

$$v_2 = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}, \qquad v_1 = -\frac{m_2 v}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Di conseguenza è sufficiente analizzare il moto relativo. Indicando la coordinata del moto relativo unidimensionale con $s = x_2 - x_1$ l'energia conservata (5) assume la forma ($v = ds/dt$)

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2}\,\mu v^2 + U(s), \tag{8}$$

dove l'energia potenziale è data da

$$U(s) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 |s|} + \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\,s = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(s - \frac{L^2}{|s|}\right)$$

e abbiamo introdotto il parametro L definito nella (6). Visti i dati iniziali $v(0) = 0$ e $s(0) = x_2(0) - x_1(0) = \Delta$, l'energia conservata ha pertanto il valore

$$\mathcal{E}_r = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\Delta - \frac{L^2}{|\Delta|}\right).$$

Per analizzare qualitativamente il moto del sistema occorre studiare la funzione $U(s)$ in relazione al valore di $\mathcal{E}_r$, ovvero di Δ. Calcoliamo le derivate

$$U'(s) = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + sgn(s)\,\frac{L^2}{s^2}\right), \qquad U''(s) = -\frac{q\sigma L^2}{\varepsilon_0 |s|^3},$$

dove $sgn(\,\cdot\,)$ indica la funzione *segno*. Come si vede, il potenziale ha un unico estremale in $s = -L$, che è un massimo. L'equilibrio di cui al quesito e) è quindi *instabile*. Inoltre $U(-L) = -q\sigma L/\varepsilon_0 < 0$, mentre $U(L) = 0$. Si tenga inoltre presente che $U(s)$ tende a $-\infty$ per $s \to 0$. Il punto $s = 0$ rappresenta infatti il punto di collisione tra le due particelle. Distinguiamo ora i seguenti casi, limitandoci per consistenza ad analizzare il moto fino a quando si svolge nella regione delle x positive. Si ricordi che $\Delta = s(0) = x_2(0) - x_1(0)$.

1) $\Delta < -L$. In questo caso abbiamo $x_2(0) < x_1(0) - L$ e guardando il grafico di $U(s)$ si vede che

l'orbita relativa è aperta e che $s(t)$ tende a $-\infty$. La particella 2 si muove quindi verso sinistra impattando sul piano carico, mentre la particella 1 si muove verso destra senza mai invertire il moto, si vedano le (7).
2) $\Delta = -L$. In questo caso si ha $x_2(0) = x_1(0) - L$ e le particelle restano ferme.
3) $-L < \Delta < 0$. In questo caso si ha $x_1(0) - L < x_2(0) < x_1(0)$ e si vede che la coordinata $s(t)$ aumenta fino a $s = 0$. La particella 2 si muove quindi verso destra mentra la particella 1 si muove verso sinistra fino a quando non collidono.
4) $\Delta > 0$. In questo caso si ha $x_2(0) > x_1(0)$ e si vede che $s(t)$ tende a zero da valori positivi. La particella 2 si muove quindi verso sinistra mentre la particella 1 si muove verso destra fino a quando non collidono.
g) Per $\Delta > 0$ ci troviamo nella situazione del caso *4*) e le particelle tendono quindi una verso l'altra. La velocità relativa v^* all'istante in cui $s(t^*) = \Delta/2$ si ricava dalla conservazione dell'energia, si veda la (8),

$$\mathcal{E}_r^i = U(\Delta) = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\Delta - \frac{L^2}{\Delta}\right), \qquad \mathcal{E}_r^f = \frac{1}{2}\,\mu v^{*2} + U\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mu v^{*2} + \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta}{2} - \frac{2L^2}{\Delta}\right).$$

Ponendo $\mathcal{E}_r^i = \mathcal{E}_r^f$ risulta

$$v^* = \sqrt{\frac{q\sigma}{\varepsilon_0\mu}\left(\frac{\Delta}{2} + \frac{L^2}{\Delta}\right)}.$$

Le velocità delle particelle si ottengono poi dalle (7):

$$v_2^* = \frac{m_1 v^*}{m_1 + m_2}, \qquad v_1^* = -\frac{m_2 v^*}{m_1 + m_2}.$$

Problema 7
a) Affinché le cariche di prova possano essere in equilibrio devono trovarsi nei vertici di un triangolo equilatero con centro P. Ciascuna carica di prova è soggetta alle forze elettriche $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ esercitate dalle altre due cariche di prova e alla forza $\vec{F}_Q$ esercitata da Q. Chiamando a il lato del triangolo e indicando con A il punto dove si trova una carica di prova si ha che la forza $\vec{F}_0 \equiv \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ è parallela al vettore QA valendo in modulo

$$F_0 = 2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\, cos30^o = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Anche la forza $\vec{F}_Q$ è rivolta lungo la direzione QA valendo in modulo

$$F_Q = \frac{q|Q|}{4\pi\varepsilon_0 (a/\sqrt{3})^2} = \frac{3q|Q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Affinché valga $\vec{F}_0 + \vec{F}_Q = 0$ deve essere $F_0 = F_Q$ e Q_0 deve essere negativa. Si ricava

$$Q_0 = -\frac{q}{\sqrt{3}}.$$

b) Le cariche di prova sono soggette all'interazione reciproca e al campo elettrico creato dalla carica Q. Per motivi di simmetria la loro energia meccanica totale conservata ha quindi la forma generale ($Q = Q_0/2 = -q/2\sqrt{3}$)

$$\mathcal{E}_M = 3 \cdot \frac{1}{2}\, mv^2 + U_E + U_{ext} = \frac{3}{2}\, mv^2 + 3 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} + 3 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(a/\sqrt{3})} = \frac{3}{2}\, mv^2 + \frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}.$$

Agli istanti iniziali e finali si ha quindi rispettivamente

$$\mathcal{E}_M^i = \frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}, \qquad \mathcal{E}_M^f = \frac{3}{2}\,mv^2 + \frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a'},$$

dove $a' > a$ è il lato del triangolo all'istante finale. La condizione $\mathcal{E}_M^f = \mathcal{E}_M^i$ dà quindi

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right) = mv^2,$$

relazione che determina a'. La distanza percorsa da una carica è poi data da $L = (a' - a)/\sqrt{3}$.
c) Per potere compiere un moto circolare uniforme ogni carica deve essere soggetta a una forza centripeta di intensità $F_c = m\omega^2(a/\sqrt{3})$. Dal quesito a) sappiamo che $\vec{F}_c = \vec{F}_0 + \vec{F}_Q$. Visto che $Q < 0$ la forza $\vec{F}_Q$ è radiale e rivolta verso P, mentre $\vec{F}_0$ è radiale e ha verso opposto a $\vec{F}_Q$. Vale quindi ($Q = 2Q_0 = -2q/\sqrt{3}$)

$$F_c = F_Q - F_0 = \frac{3q|Q|}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{m\omega^2 a}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}}.$$